

Chapitre 9 : Fonction carré

Définition

La fonction carré est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Exercice 1 (calcul mental)

Calcul l'image par la fonction carré des réels suivants : -6 , 3 , $-\frac{2}{5}$, $1 + \sqrt{5}$, $2 - \sqrt{7}$.

Remarque

Un carré est toujours positif ou nul.

Théorème (sens de variation)

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	

Diagramme illustrant la variation de la fonction carré : une flèche descendante relie $-\infty$ à 0 , et une flèche ascendante relie 0 à $+\infty$.

Démonstration

Soient $a, b \in] -\infty; 0]$. Supposons que $a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - b^2 \\ &= (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

Comme on suppose que $a < b$, $a - b < 0$.

Comme a et b sont négatifs (ils appartiennent $] -\infty; 0]$), $a + b < 0$.

D'après la règle des signes, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 > 0$.

Ainsi, pour tous a et b appartenant à l'intervalle $] -\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0]$.

On montre de façon analogue qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$. □

Exercice 2

Comparer sans calculatrice $(1 + \sqrt{3})^2$ et $\left(\frac{12}{7}\right)^2$.

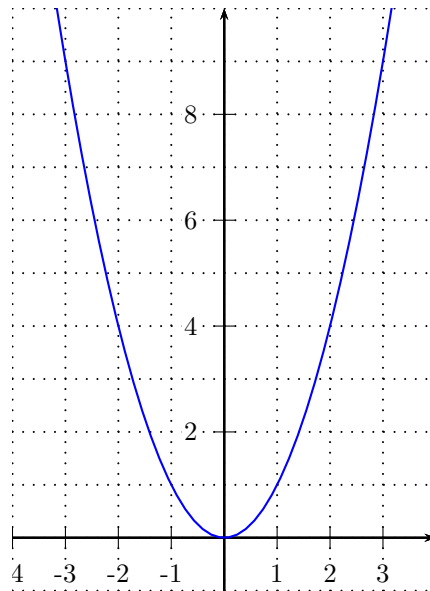
Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
x^2									

Théorème (Représentation graphique)

La courbe représentative de la fonction carré est une parabole de sommet O .

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré admet l'axe des ordonnées (Oy) pour axe de symétrie.



Remarque

La courbe de la fonction carré est une parabole.

Dans un repère orthogonal, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.

Autrement dit, deux opposés ont le même carré.

L'ensemble des valeurs prises par la fonction carré est $[0; +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ (un carré est toujours positif).

Exercice 3

1. Déterminer l'image d'un intervalle par la fonction carré : [ressource 924](#)
2. Déterminer les antécédents d'un nombre par la fonction carré : [ressource 2069](#)
3. Dresser le tableau de variations de la fonction carré sur un intervalle $[a; b]$: [ressource 2524](#)

Propriété (Équation $x^2 = a$)

Soit a un nombre réel.

1. Lorsque $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions qui sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
2. Lorsque $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution qui est 0.
3. Lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle.

Exercice 4 (calcul mental)

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 17$
2. $x^2 + 3 = 0$
3. $2x^2 + 1 = 0$
4. $2x^2 - 1 = 0$
5. $-3x^2 = 0$
6. $-3 + x^2 = 0$
7. $(3x - 1)^2 = 0$

Exercice 5

Faire des propositions vraies du type : « pour tout réel x , si ..., alors ... » en utilisant les énoncés :

$$x^2 = 16, x = 4, x = -4, x = 4 \text{ ou } x = -4, x^3 = 64.$$