2de. Correction du devoir maison nº 3

Exercice 1 (nº 34 page 217)

1. $g(x) \geqslant 0,5$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points de } \mathscr{C}_g \text{ qui ont une ordonnée supérieure ou égale à 0,5.} \quad S = [-2,5;-1] \cup [1,5;4].}$

2. $g(x) < 0$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement négative.} \quad S =]-0,5;1[.}$

3. $g(x) > 1$

   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement supérieure à 1.} \quad S =]2,5;4].}$

Exercice 2 (nº 37 page 218)

1. $f(x) \geqslant g(x)$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g. \quad S = [-3;-2] \cup [1;3].}$

2. $f(x) > g(x)$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est strictement au-dessus de } \mathscr{C}_g \text{ (on exclut les abscisses des points d'intersection).} \quad S = [-3;-2[\cup]1;3].}$

3. $f(x) \leqslant g(x)$

   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \mathscr{C}_g. \quad S = [-2;1].}$

Exercice 3 (nº 5 page 47)

Montrer que $D = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20}$ est un nombre entier.

On sait que pour tous réels a, b positifs ou nuls, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20} \\
&= \sqrt{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 20} \\
&= \sqrt{(2 \times 3 \times 6) \times (4 \times 5 \times 20)} \\
&= \sqrt{6^2} \times \sqrt{20^2} \\
&= 6 \times 20 \\
&= 120
\end{aligned}$$

$\boxed{D = 120, \text{ donc } D \text{ est bien un nombre entier.}}$

Exercice 4 (nº 23 page 50)

Écrire $F = 15^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2}$ sous la forme $3^n \times 5^p$ avec $n, p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
F &= 15^3 \times \frac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2} \\
&= (3 \times 5)^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times (3^2 \times 5)^{-2} \\
&= 3^3 \times 5^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times 3^{-4} \times 5^{-2} \\
&= 3^{3-2-4} \times 5^{3-2-2} \\
&= 3^{-3} \times 5^{-1}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (no 39 page 51)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{200} - \sqrt{98}$ et $BC = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8}$.

Montrer que $ABCD$ est un carré et calculer son aire.

1. Comme $ABCD$ est un rectangle, c'est un carré si et seulement si il a deux côtés consécutifs de même longueur.
   On va montrer que $AB = BC$.
   D'une part,
   $AB = \sqrt{200} - \sqrt{98} = \sqrt{100 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$
   $AB = \sqrt{100} \times \sqrt{2} - \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
   D'autre part,
   $BC = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{\dfrac{7 \times 50}{7}} - \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{50} - \sqrt{4} \times \sqrt{2}$
   $BC = \sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

   $\boxed{\text{Comme } AB = BC \text{, le rectangle } ABCD \text{ a deux côtés consécutifs de même longueur. Donc } ABCD \text{ est un carré.}}$

2. L'aire du carré est $AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$.

   $\boxed{\text{Son aire est de 18 (unités d'aire).}}$