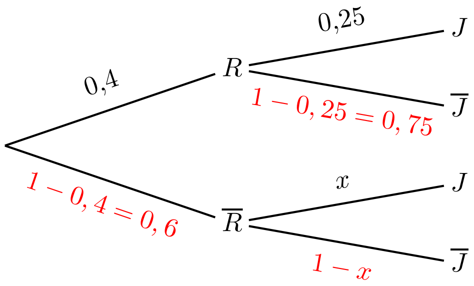
Correction du devoir maison n° 7

Exercice 1

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. Déterminer la valeur exacte de x.
   On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0,2$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) = P(R) \times P_R(J) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(J)$
   $P(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = 0,1 + 0,6x$
   Or, on sait que $P(J) = 0,2$.
   Donc $0,2 = 0,1 + 0,6x$, et enfin $x = \dfrac{1}{6}$.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   $P_J(R) = \dfrac{P(R \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,4 \times 0,25}{0,2} = \dfrac{1}{2}$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
   On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.
   On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
   $P(X \geqslant 75) = 1 - P(X \leqslant 74) \approx 0,998$.

Exercice 2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire
                  | compris entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |     | alors a prend la valeur 1 − a
                  |     | sinon Si d ⩽ 4
                  |     |         — alors b prend la valeur 1 − b
                  |     |       FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

   (a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.

variables	i	d	a	b	s
initialisation			**0**	**0**	
1er passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2e passage boucle Pour	**2**	**6**	**1**	**0**	**1**
3e passage boucle Pour	**3**	**4**	**1**	**1**	**2**

(b) Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.
À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

2. Pour tout entier naturel n, on note :
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P\left(X_n\right)$; $y_n = P\left(Y_n\right)$ et $z_n = P\left(Z_n\right)$.

(a) Au début du jeu les deux pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

(b) $P_{X_n}\left(X_{n+1}\right)$ est la probabilité qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n+1$-ième lancer, c'est-à-dire que le dé tombe sur 5 ou 6. La probabilité de l'événement $\{5\ ;\ 6\}$ est $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité.
Donc $P_{X_n}\left(X_{n+1}\right) = \dfrac{1}{3}$.

(c) On complète l'arbre proposé :

(d) Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) D'après la formule des probabilités totales :
$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1})$
$y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}z_n = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}(1 - x_n - y_n)$
$y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}x_n - \dfrac{2}{3}y_n = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \dfrac{1}{2}$.

$b_{n+1} = y_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}\left(b_n + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{4}{6} - \dfrac{3}{6}$

$b_{n+1} = -\dfrac{1}{3}b_n - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3}b_n - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3}b_n$

$b_0 = y_0 - \dfrac{1}{2} = 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\dfrac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \dfrac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(g) La suite (b_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$; comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \dfrac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\dfrac{1}{2}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = \dfrac{1}{2}$.
Donc à long terme, la probabilité d'avoir une piède côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.