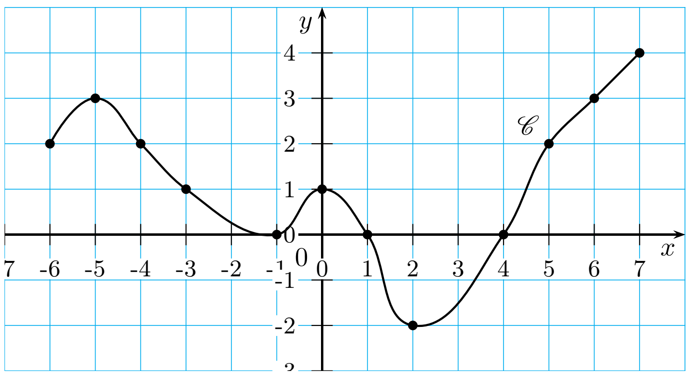
Correction du contrôle de mathématiques n° 5
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

1. Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
2. Rappeler les trois identités remarquables et donner leur application avec $a = 2x$ et $b = 6$.
   Pour tous réels a, b, x,
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(2x+6)^2 = 4x^2 + 24x + 36$
   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(2x-6)^2 = 4x^2 - 24x + 36$
   $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(2x+6)(2x-6) = 4x^2 - 36$.

Exercice 2 (4 points)

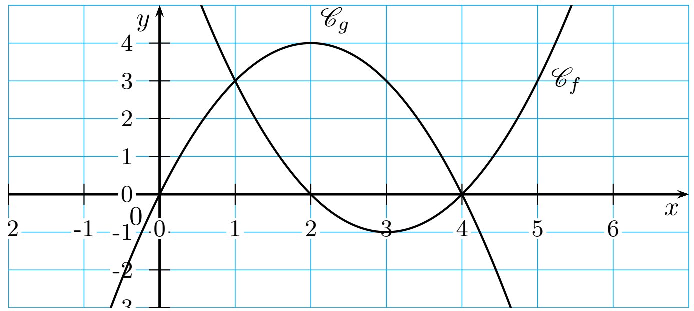
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[-6; 7]$.



1. Donner sans justification :
   (a) L'image de 6 ; $\boxed{f(6) = 3}$
   (b) Les antécédents de 0 ; $\boxed{\text{Les antécédents de 0 sont } -1\,;\,1\,;\,4.}$
   (c) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
   $\boxed{\text{Elle a trois solutions.}}$
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à 3. Les solutions sont -5 et 6.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 2$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée supérieure ou égale à 2. L'ensemble solution est $[-6; -4] \cup [5; 7]$.

Exercice 3 (4 points)

On donne ci-dessous la représentation graphique de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Dresser le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Dresser le tableau de signe de g.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. Expliquer la méthode.
   Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$. $S =]1; 4[$.

Exercice 4 (4 points)

Donner sans justification l'ensemble solution des équation et inéquations suivantes. On pourra s'appuyer sur l'allure de la courbe d'une fonction de référence.

a) $x^2 = 5$ $\boxed{S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}}$ b) $x^2 > 4$ $\boxed{S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[}$

c) $\sqrt{x} \leqslant 1$ $\boxed{S = [0; 1]}$ d) $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ $\boxed{S =]-\infty; 0[\cup[1; +\infty[}$

Exercice 5 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Développer et réduire l'expression $A(x) = 4 - 7(x+5)^2$.
   $A(x) = 4 - 7(x^2 + 10x + 25) = 4 - 7x^2 - 70x - 175$
   $A(x) = -7x^2 - 70x - 171$

2. Développer et réduire l'expression

$$B(x) = (2x+5)^2 - 3(x+1)(x-5).$$

$\boxed{B(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3(x^2 - 4x - 5) = x^2 + 32x + 40}$

3. Factoriser $C(x) = (x-6)^2 - (9x+11)(x-6)$.
$\boxed{C(x) = (x-6)[(x-6) - (9x+11)] = (x-6)(-8x-17)}$

4. Soit $D(x) = (3x-1)^2 - 49$.

   (a) Développer $D(x)$.
   $\boxed{D(x) = 9x^2 - 6x + 1 - 49 = 9x^2 - 6x - 48.}$

   (b) Factoriser $D(x)$.
   $D(x) = (3x-1)^2 - 7^2 = (3x-1-7)(3x-1+7)$
   $D(x) = (3x-8)(3x+6)$.

Exercice 6 (Bonus, 2 points)
On traitera, au choix, une seule des deux questions suivantes :

1. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
Comme $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, et $x - y = 11$, on obtient $(x+y) \times 11 = 77$, donc $x + y = 7$.
De plus, $x - y = 11$, d'où, en additonnant ces deux équations, $2x = 18$, et donc $x = 9$.
Enfin, comme $x - y = 11$, il vient $y = x - 11 = 9 - 11 = -2$.
On vérifie facilement que ce couple $(9; -2)$ convient, et c'est donc la seule solution.

2. Le nombre $1 + \sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3 - x^2 - 6x - 4 = 0$?
$(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$.
Donc $(1+\sqrt{5})^3 = (6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 \times 5 = 16 + 8\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{5}) &= (1+\sqrt{5})^3 - (1+\sqrt{5})^2 - 6(1+\sqrt{5}) - 4 \\ &= 16 + 8\sqrt{5} - (6 + 2\sqrt{5}) - 6 - 6\sqrt{5} - 4 \\ &= 16 - 6 - 6 - 4 + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.

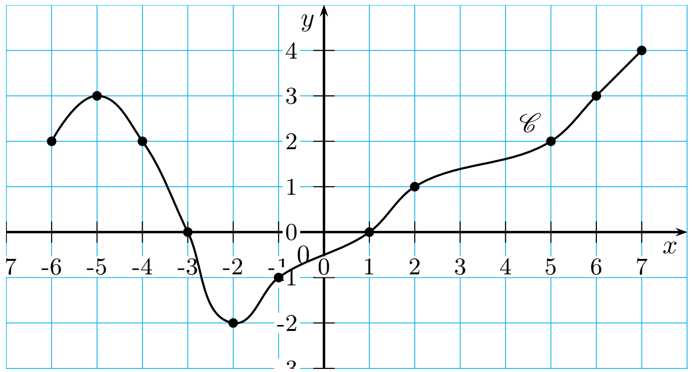
Sujet 2

Exercice 7 (cours, 3 points)

1. Recopier et compléter la propriété suivante sur les résolutions graphiques.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Rappeler les trois identités remarquables et donner leur application avec $a = 6x$ et $b = 5$.
Pour tous réels a, b, x,
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(6x+5)^2 = 36x^2 + 60x + 25$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(6x+5)^2 = 36x^2 - 60x + 25$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(6x+5)(6x-5) = 36x^2 - 25$.

Exercice 8 (4 points)
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner sans justification :

   (a) L'image de -4 ; $\boxed{f(-4) = 2.}$

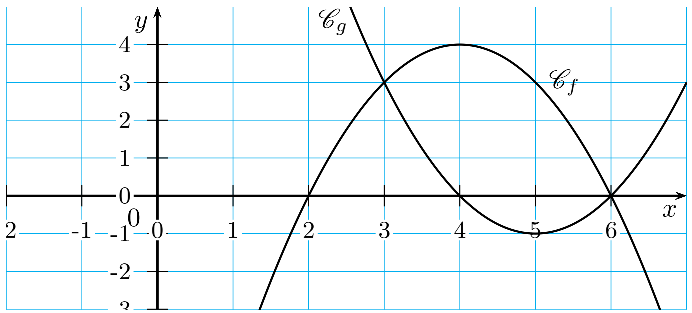
   (b) Les antécédents de 3 ; Les antécédents de 3 sont -5 ; et 6.

   (c) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
   Elle a deux solutions.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$. Expliquer la méthode.
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à 2. Les solutions sont -6 ; -4 et 5.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 0$. Expliquer la méthode.
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée positive ou nulle. Les solutions sont $[-6; -3] \cup [1; 7]$.

Exercice 9 (4 points)
On donne ci-dessous la représentation graphique de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Dresser le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Dresser le tableau de signe de g.

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$. Expliquer la méthode.
Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$. $S = [3; 6]$.

Exercice 10 (4 points)
Donner sans justification l'ensemble solution des équation et inéquations suivantes. On pourra s'appuyer sur l'allure de la courbe d'une fonction de référence.

1. $x^2 = 3$ $\boxed{S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}}$
2. $x^2 > 1$ $\boxed{S =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[}$
3. $\sqrt{x} \leqslant 2$ $\boxed{S = [0; 4]}$
4. $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$ $\boxed{S =]0; 1]}$

Exercice 11 (5 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Développer et réduire l'expression $A(x) = 1 - 2(x-3)^2$.
$\boxed{A(x) = 1 - 2(x^2 - 6x + 9) = 1 - 2x^2 + 12x - 18 = -2x^2 + 12x - 17.}$
2. Développer et réduire l'expression $B(x) = (4x-1)^2 - 2(x+1)(x-5)$.
$\boxed{B(x) = (16x^2 - 8x + 1) - 2(x^2 - 4x - 5) = 14x^2 + 11.}$
3. Factoriser $C(x) = (x+5)^2 - (2x+11)(x+5)$.
$\boxed{C(x) = (x+5)[x+5) - (2x+11)] = (x+5)(-x-6).}$
4. Soit $D(x) = 81 - (3x+4)^2$.
   (a) Développer $D(x)$.
   $\boxed{D(x) = 81 - (9x^2 + 24x + 16) = -9x^2 - 24x + 65.}$
   (b) Factoriser $D(x)$.
   $D(x) = 9^2 - (3x+4)^2 = (9 + 3x + 4) \times [9 - (3x+4)]$
   $D(x) = (3x + 13)(-3x + 5)$.

Exercice 12 (Bonus, 2 points)
On traitera, au choix, une seule des deux questions suivantes :

1. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
Comme $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, et $x - y = 11$, on obtient $(x+y) \times 11 = 77$, donc $x + y = 7$.
De plus, $x - y = 11$, d'où, en additonnant ces deux équations, $2x = 18$, et donc $x = 9$.
Enfin, comme $x - y = 11$, il vient $y = x - 11 = 9 - 11 = -2$.
On vérifie facilement que ce couple $(9; -2)$ convient, et c'est donc la seule solution.
2. Le nombre $1 + \sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3 - x^2 - 6x - 4 = 0$?
$(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$.
Donc $(1+\sqrt{5})^3 = (6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\times 5 = 16 + 8\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{5}) &= (1+\sqrt{5})^3 - (1+\sqrt{5})^2 - 6(1+\sqrt{5}) - 4 \\ &= 16 + 8\sqrt{5} - (6 + 2\sqrt{5}) - 6 - 6\sqrt{5} - 4 \\ &= 16 - 6 - 6 - 4 + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.