Chapitre 14 : Divisibilité - Nombres premiers

Rappel :
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 10\,000; \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -10\,001; -10\,000; \ldots; -1; 0; 1; 2; \ldots; 10\,000; \ldots\}$$

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition
Soient a et b des nombres entiers relatifs (appartenant à $\mathbb{Z}$), avec $b \neq 0$.
On dit que b divise a s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.
Les formulations "b divise a", "b est un diviseur de a" , et "a est un multiple de b" sont équivalentes.

Exemple :
-28 est divisible par 4 car ....
7 n'est pas divisible par 2 car ....
0 est multiple de tout nombre b car ....
Tout nombre entier a est multiple de 1 car ....

Propriété
Soit $b \in \mathbb{Z}$. La somme de deux multiples de b est un multiple de b.

Démonstration
....
....
....
....
....

Définition
Un entier est pair s'il est divisible par 2.
Un nombre entier est impair s'il n'est pas divisible par 2.

Remarque
Un entier n est pair ssi il existe un entier k tel que $n = 2k$.
Un entier n est impair ssi il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Propriété
1. Le carré d'un nombre pair est pair.
2. Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Propriété (critères de divisiblité)
Un nombre entier relatif est divisible par :

- 2 lorsque son chiffre des unités est 0,2,4,6, ou 8 ;
- 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 3 lorque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- 9 lorque la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;

II Nombres premiers

Définition
Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Remarque

1. 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
2. 0 n'est pas premier car il est divisible par n'importe quel entier non nul.
3. 2 est le plus petit nombre premier et le seul nombre premier pair.

Remarque (liste des nombres premiers inférieurs à 100)
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, et 97.

Propriété (admise)
Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers, et cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

Exercice 1
Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 160 ; 96 ; $21^3 \times 35^4$

. . . .
. . . .
. . . .

III Fractions irréductibles

Définition
Une fraction est dite irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercice 2
Simplifier les fractions $\frac{24}{80}$ et $\frac{30}{84}$.