Terminale Générale - Devoir n° 2

Sujet 1

Exercice 1 (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2, en détaillant les calculs.
2. Démonter par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

Exercice 2 (3 points)

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{a; d\}$.

1. Déterminer les ensembles $E \cup F$, $E \cap F$, $E \times F$ et F^2.
2. Déterminer le nombre de parties de $E \times F$. Justifier.
3. Combien y a-t-il de 9-uplets de E ? Justifier.
4. Donner un quintuplet de F.

Exercice 3 (2 points)

Raymond Queneau a intitulé un de ses ouvrages *Cent mille milliards de poèmes*. Celui-ci est composé de 14 pages comprenant chacune 10 vers.

Pour composer un poème de 14 vers, il suggère de choisir un vers dans chaque page comme suit :

— le premier vers du poème est choisi à la page 1,
— le deuxième vers du poème est choisi à la page 2,
— et ainsi de suite jusqu'à la page 14.

L'intitulé du livre est-il exact ?

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2)\mathrm{e}^{-5x+1}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) :
   $y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8)\mathrm{e}^{-5x+1}$.

Exercice 5 (1 point)

Soient u et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Déterminer l'expression de la fonction $f = g \circ u$.

Exercice 6 (3 points)

Dériver les fonctions suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \sqrt{5x^2 + 11}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (3x + 4)^6$.
3. Sur $]4; +\infty[$, $C(x) = \dfrac{1}{(4-x)^2}$.

Exercice 7 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites en $-\infty$ et $+\infty$).
3. Existe-il des tangentes à la courbe de f passant par le point $A(1; 0)$? Justifier. On ne demande pas de préciser leur équation.

Terminale Générale - Devoir n° 2

Sujet 2

Exercice 8 (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2, en détaillant les calculs.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + n$.

Exercice 9 (3 points)

Soient $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{2; 5\}$.

1. Déterminer les ensembles $E \cup F$, $E \cap F$, $E \times F$ et F^2.
2. Déterminer le nombre de parties de $E \times F$. Justifier.
3. Combien y a-t-il de 10-uplets de E ? Justifier.
4. Donner un quadruplet de F.

Exercice 10 (2 points)

Un poète imagine un ouvrage intitulé *Deux cent quarante-quatre millions cent quarante mille six cent vingt-cinq poèmes*. Celui-ci est composé de 12 pages comprenant chacune 5 vers.

Pour composer un poème de 12 vers, on choisit un vers dans chaque page comme suit :

— le premier vers du poème est choisi à la page 1,
— le deuxième vers du poème est choisi à la page 2,
— et ainsi de suite jusqu'à la page 12.

L'intitulé du livre est-il exact ?

Exercice 11 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x^2 + 3x - 1)\mathrm{e}^{-3x+2}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que f est une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 6y = (12x^2 + 17x)\mathrm{e}^{-3x+2}$.

Exercice 12 (1 point)

Soient u et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$.

Déterminer l'expression de la fonction $f = g \circ u$.

Exercice 13 (3 points)

Dériver les fonctions suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \sqrt{3x^2 + 7}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (2x - 5)^7$.
3. Sur $]3; +\infty[$, $C(x) = \dfrac{1}{(3 - x)^2}$.

Exercice 14 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 3x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites en $-\infty$ et $+\infty$).
3. Existe-t-il des tangentes à la courbe de f passant par le point $A(1; 0)$? Justifier. On ne demande pas de préciser leur équation.