Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

1. (a) Équation $3m^2 + 7m - 6 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 72 = 121 = 11^2$.
   $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-11}{6} = -3$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+11}{6} = \dfrac{2}{3}$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont } -3 \text{ et } \dfrac{2}{3}.}$

   (b) Signe de $3m^2 + 7m - 6 = 0$.
   Le trinôme $3m^2 + 7m - 6$ a pour racines -3 et $\dfrac{2}{3}$.
   Il prend le signe de a ($a = 3 > 0$) à l'extérieur des racines.

m	$-\infty$		-3		$2/3$		$+\infty$
$3m^2 + 7m - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Valeur de m pour que (E) ne soit pas du second degré.
   (E) n'est pas une équation du second degré si et seulement si le coefficient de x^2 est nul, c'est à dire $m - 1 = 0$, c'est à dire $m = 1$.
   (E) s'écrit alors $-4x - 5 = 0$ c'est à dire $x = -\dfrac{5}{4}$.
   $\boxed{\text{Donc, si } m = 1, \text{ l'équation } (E) \text{ a une solution : } -\dfrac{5}{4}.}$

3. (a) -1 est solution de (E) si et seulement si
   $(m-1) \times (-1)^2 - 4m \times (-1) + m - 6 = 0$
   $m - 1 + 4m + m - 6 = 0$, soit $6m - 7 = 0$, et $m = \dfrac{7}{6}$.
   $\boxed{-1 \text{ est racine de } (E) \text{ si et seulement si } m = \dfrac{7}{6}}.$

   (b) m pour que (E) ait une solution double.
   (E) a pour discriminant :
   $\Delta = (4m)^2 - 4(m-1)(m-6) = 16m^2 - 4(m^2 - 7m + 6)$.
   $\Delta = 16m^2 - 4m^2 + 28m - 24 = 12m^2 + 28m - 24$.
   $\Delta = 4(3m^2 + 7m - 6)$.
   Or on sait que (E) admet une racine double si et seulement si elle est du second degré ($m \neq 1$) avec $\Delta = 0$, c'est à dire $m \neq 1$ et $3m^2 - 7m - 6 = 0$.
   D'après la question 1)a) :
   $\boxed{(E) \text{ admet une racine double ssi } m = -3 \text{ ou } m = \dfrac{2}{3}.}$

   (c) (E) n'admet pas de solution réelle si et seulement si elle est du second degré avec $\Delta < 0$, c'est à dire $3m^2 - 7m - 6 < 0$ et $m \neq 1$.
   D'après la question 1)b) :
   $\boxed{(E) \text{ n'admet pas de racine réelle ssi } m \text{ appartient à } \left]-3; \dfrac{2}{3}\right[.}$
   On vérifie que sur cet intervalle $m \neq 1$.

   (d) (E) admet deux racines réelles distinctes si et seulement si elle est du second degré avec $\Delta > 0$.
   Cela revient à $m \neq 1$ et $3m^2 - 7m - 6 > 0$.
   D'après la question 1)b) :
   $3m^2 - 7m - 6 > 0$ ssi $m \in]-\infty; -3[\cup \left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.
   Or, 1 appartient à cette réunion d'intervalles.
   $\boxed{(E) \text{ admet deux racines réelles distinctes si et seulement si } m \text{ appartient à }]-\infty; -3[\cup \left]\dfrac{2}{3}; 1\right[\cup]1; +\infty[.}$

Exercice 2

Deux entiers naturels ont pour différence 7 et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Quels sont-ils ?
Soient x et y de tels nombres, x étant le plus grand.
On a $x - y = 7$, et $xy - (x + y) = 43$.
On a alors $y = x - 7$, et en remplaçant dans la 2^e^ équation :

$$\begin{aligned} x(x-7) - (x + x - 7) &= 43 \\ x^2 - 7x - 2x + 7 &= 43 \\ x^2 - 9x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 + 4 \times 36 = 225 = 15^2 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-15}{2} = -3$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+15}{2} = 12$
On exclut $x = -3$ car on cherche des entiers naturels.
Il reste $x = 12$, alors $y = x - 7 = 12 - 7 = 5$.
Vérifions que 12 et 5 répondent au problème :
$12 - 5 = 7$ et $12 \times 5 - (12 + 5) = 60 - 17 = 43$.
$\boxed{\text{Les nombres cherchés sont 12 et 5.}}$