Exercices sur les équations différentielles du 1^{er} ordre

Fiche n° 2

Exercice 6 (des équations homogènes)

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I.

1. $(H_1) : y' + 2xy = 0\,;\ I = \mathbb{R}$.
2. $(H_2) : 2y' - \mathrm{e}^{2x}y = 0\,;\ I = \mathbb{R}$.
3. $(H_3) : t \times y' + y = 0\,;\ I =]0; +\infty[$.
4. $(H_4) : (1+t)y' + y = 0\,;\ I =]-1; +\infty[$.
5. $(H_5) : (1+2t)y' + y = 0\,;\ I =]-\dfrac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $(E) : 2\dfrac{dx}{dt} + tx = 0$ où x est une fonction dérivable de la variable t.

1. Résoudre (E).
2. En déduire la solution vérifiant la condition $x(0) = 2$.

Exercice 8 (une équation complète)

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Résoudre l'équation homogène $(H) : y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 3$.

Exercice 9 (variante)

On se propose de résoudre sur $]-1; +\infty[$ l'équation différentielle $(E) : (1+x)\dfrac{dy}{dx} - 2y = \ln(1+x)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}$ est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 10 (coefficients constants, avec second membre)

La modélisation d'un phénomène physique conduit à l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 12$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + y = 0$.
2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution F de (E) vérifiant $F(0) = 0$.

Exercice 11 (variante)

On considère l'équation $(E) : 2x' + x = 2$, où x est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $x(0) = 1$.

Exercice 12

Un réservoir contient 1 000L d'eau douce dont la salinité est de 0,12 g.L^{-1}.

À la suite d'un regrettable accident, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.

On note s la salinité de l'eau du réservoir. s est une fonction du temps t, exprimé en minutes.

On admet que s est solution de l'équation différentielle (E) : $s'(t) + 0,01s(t) = 0,39$.

1. Résoudre l'équation $(H) : s'(t) + 0,01s(t) = 0$.
2. Donner une fonction constante f solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Montrer que $s(t) = 39 - 38,88\mathrm{e}^{-0,01t}$.
5. Déterminer la salinité de l'eau 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2}.