Correction de l'interrogation n° 3

Sujet 1

Exercice 1 (cours)

Exercice 2

La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

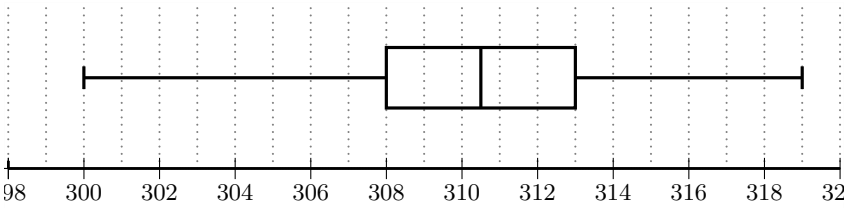
300 ;311 ;315 ;308 ;311 ;317 ;308 ;309 ;311 ;312 ;
309 ;318 ;307 ;308 ;303 ;310 ;314 ; 313 ;310 ;319.

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs de la série :

Poids x_i	300	303	307	308	309	310	311	312	313	314	315	317	318	319
Effectifs n_i	1	1	1	3	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1
ECC	1	2	3	6	8	10	13	14	15	16	17	18	19	20

2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série. Justifier.
   L'effectif total est $N = 20$ (pair).
   Donc la médiane est le moyenne des deux valeurs centrales, la 10e et la 11e.
   $\boxed{Me = \dfrac{310 + 311}{2} = 310,5.}$
   $\dfrac{N}{4} = \dfrac{20}{4} = 5.$
   Q_1 est la 5e valeur : $\boxed{Q_1 = 308.}$
   $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{60}{20} = 15.$
   Q_3 est la 15e valeur : $\boxed{Q_3 = 313.}$

3. Construire le diagramme en boîte de la série.



4. Un lot est accepté si les trois conditions suivantes sont remplies :
   — Le poids moyen m d'une barquette est de 310 g à 1 g près ;
   — l'écart-type s des poids est inférieur à 5 g ;
   — au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m - s; m + s]$
   Qu'en est-il pour ce lot ?

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum n_i x_i}{N} \\ &= \frac{1}{20}(300 \times 1 + 303 \times 1 + \cdots + 319 \times 1) \\ &= 310,65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= (\sum f_i x_i^2) - (m)^2 \\ V &= \frac{1}{20}(300^2 + 303^2 + \cdots + 319^2) - (310,65)^2 \\ V &= \frac{1930493}{20} - (310,65)^2 \\ V &= 20,7275 \\ s &= \sqrt{V} \\ s &\approx 4,55 \end{aligned}$$

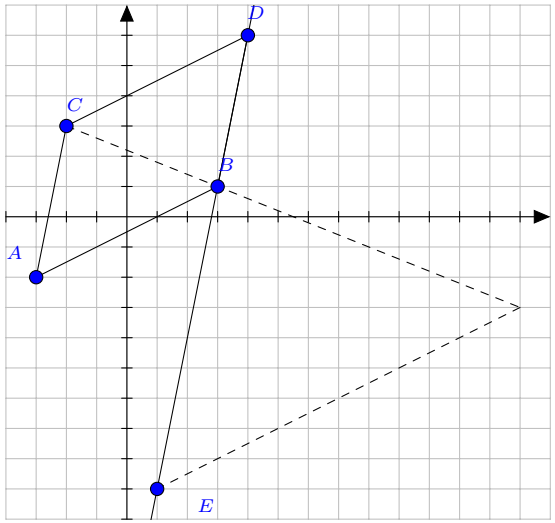
Il est clair que les deux premières contraintes sont respectées.
Il reste à déterminer le pourcentage de valeurs dans l'intervalle $[m-s; m+s]$.
$m - s \approx 310,65 - 4,55 \approx 306,1.$
$m + s \approx 310,65 + 4,55 \approx 315,2.$
Il y a 5 valeurs en dehors de l'intervalle $[m - s; m + s]$, ce qui revient à dire qu'il y a 15 valeurs dans cet intervalle.
$\dfrac{15}{20} \times 100 = 75.$
Il y a 75 % des poids dans l'intervalle $[m - s; m + s]$.
On ne peut pas accepter ce lot à cause de la 3e contrainte.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3; -2)$, $B(3; 1)$ et $C(-2; 3)$.
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice

1. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
   $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB}\binom{3+3}{1+2} = \binom{6}{3}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{x_D+2}{y_D-3}$.
   D'où le système $\begin{cases} x_D + 2 = 6 \\ y_D - 3 = 3 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 6 \end{cases}$
   $\boxed{D \text{ a pour coordonnées } (4; 6).}$

2. (a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB}$.
   Lire les coordonnées du point E sur le graphique.



Graphiquement, on constate que E a pour coordonnées $(1;-9)$.

(b) Retrouver les coordonnées de E par le calcul.
$\overrightarrow{CB}\binom{3+2}{1-3} = \binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{6}{3}$, donc $3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB}\binom{15-12}{-6-6} = \binom{3}{-12}$.
$\overrightarrow{CE}\binom{x_E+2}{y_E-3}$. Or $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB}$, d'où

$$\begin{cases} x_E + 2 = 3 \\ y_E - 3 = -12 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -9 \end{cases}$$

E a pour coordonnées $(1;-9)$.

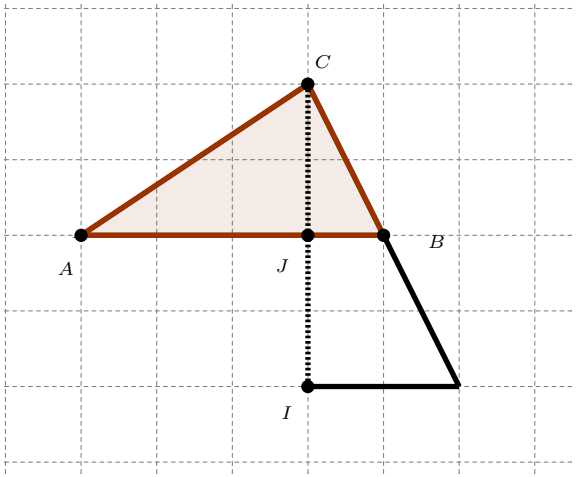
3. Montrer que les points B, D et E sont alignés.
$\overrightarrow{BD}\binom{4-3}{6-1} = \binom{1}{5}$ et $\overrightarrow{BE}\binom{1-3}{-9-1} = \binom{-2}{-10}$

On constate que $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BD}$, donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, donc les points B, D et E sont alignés.

Exercice 4

Soit ABC un triangle. Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

1. Faire une figure, construire les points I et J.



2. Montrer que $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
4. Que peut-on en déduire ?
On a $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, donc les point I,J et C sont alignés.

Plus précisément, la relation $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$ prouve que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 5 (bonus - 1,5 points)

On considère la série statistique formée des valeurs entières suivantes :

$$6, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17$$

En remplaçant une valeur par une autre valeur entière, on souhaite rendre l'écart-type le plus petit possible. Quelle modification faut-il faire ?
Sur la série de départ, à l'aide de la calculatrice, on obtient comme moyenne $\overline{x} \approx 11,11$.
L'écart-type décrit de la dispersion par rapport à la moyenne.
Pour réduire au maximum l'écart-type, on remplace la valeur de la série la plus éloignée de la moyenne : le 17.
On le remplace par l'entier le plus proche de la moyenne de la série constituée des nombres une fois qu'on a enlevé le 17. La moyenne devient alors 10,375.

On remplace donc le 17 par un 10.

Sujet 2

Exercice 6

La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

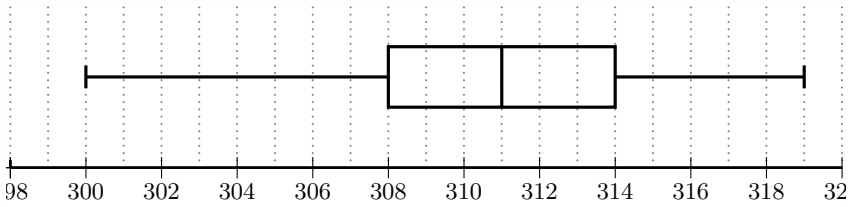
300 ;310 ;307 ;311 ;309 ;307 ;311 ;314 ;309 ;314
310 ;312 ;311 ;318 ;301 ;315 ;308 ;315 ;313 ;319

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs de la série :

Poids x_i	300	301	307	308	309	310	311	312	313	314	315	318	319
Effectifs n_i	1	1	2	1	2	2	3	1	1	2	2	1	1
ECC	1	2	4	5	7	9	12	13	14	16	18	19	20

2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série. Justifier.
L'effectif total est $N = 20$ (pair).
Donc la médiane est le moyenne des deux valeurs centrales, la 10e et la 11e.
$\boxed{Me = \dfrac{311 + 311}{2} = 311.}$
$\dfrac{N}{4} = \dfrac{20}{4} = 5.$
Q_1 est la 5e valeur : $\boxed{Q_1 = 308.}$
$\dfrac{3N}{4} = \dfrac{60}{20} = 15.$
Q_3 est la 15e valeur : $\boxed{Q_3 = 314.}$

3. Construire le diagramme en boîte de la série.



4. Un lot est accepté si les trois conditions suivantes sont remplies :
— Le poids moyen m d'une barquette est de 310 g à 1 g près ;
— l'écart-type s des poids est inférieur à 5 g ;
— au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m - s; m + s]$
Qu'en est-il pour ce lot ?

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum n_i x_i}{N} \\ &= \frac{1}{20}(300 \times 1 + 301 \times 1 + \cdots + 319 \times 1) \\ &= 310,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= (\sum f_i x_i^2) - (m)^2 \\ V &= \frac{1}{20}(1 \times 300^2 + 1 \times 301^2 + \cdots + 1 \times 319^2) - (310,7)^2 \\ V &= \frac{1931128}{20} - (310,7)^2 \\ V &= 21,91 \\ s &= \sqrt{V} \\ s &\approx 4,68 \end{aligned}$$

Il est clair que les deux premières contraintes sont respectées.
Il reste à déterminer le pourcentage de valeurs dans l'intervalle $[m - s; m + s]$.
$m - s \approx 310,7 - 4,68 \approx 306,02.$
$m + s \approx 310,7 + 4,68 \approx 315,38.$
Il y a 4 valeurs en dehors de l'intervalle $[m - s; m + s]$, ce qui revient à dire qu'il y a 16 valeurs dans cet intervalle.
$\dfrac{16}{20} \times 100 = 80.$
Il y a 80 % des poids dans l'intervalle $[m - s; m + s]$.
$\boxed{\text{On peut accepter ce lot puisque les 3 contraintes sont respectées.}}$