Chapitre 8 : Complément sur la dérivation

I Dérivées de $\sqrt{u}$ et u^n.

Théorème

1. Si u est une fonction dérivable sur I et si pour tout $x \in I$ $u(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$
2. Si u est une fonction dérivable sur I, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction u^n est dérivable sur I et
$$(u^n)' = n\, u^{n-1} \times u',$$

Démonstration

1. Soient $a \in I$, et h un réel tel que $a+h \in I$. Le taux d'accroissement de la fonction $\sqrt{u}$ entre a et $a+h$ est :
$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)})(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})}{h(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} \end{aligned}$$
Comme la fonction u est continue en a, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$.
Comme la fonction u est dérivable en a, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.
Par produit des limites,
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}.$$
Donc la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable en a et le nombre dérivé en a est $\frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable en tout réel a de I elle est donc dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
2. On raisonne par récurrence.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
On veut montrer la propriété $P(n)$: Pour tout $n \geqslant 1$, u^n est dérivable et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
Initialisation :
Pour $n = 1$, $u^1 = u$ est dérivable sur I, et $(u^1)' = u'$. $1 \times u^{1-1}u' = u'$.
Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $k \geqslant 1$. On suppose que la propriété $P(k)$ est vraie.
Montrons que $P(k+1)$ est vraie.
La fonction $u^{k+1} = u^k \times u$ est dérivable sur I par produit de fonctions dérivables (HR pour

u^k).
Par dérivation d'un produit et avec l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}(u^{k+1})' &= (u^k \times u)' \\ &= (u^k)' \times u + u^k \times u' \\ &= ku^{k-1}u' \times u + u^k u' \\ &= k \times u^k u' + u^k u' \\ &= (k+1)u^k u'\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
Par récurrence, on a donc montré que la fonction u^n est dérivable pour tout $n \geqslant 1$ et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$. □

Exercice 1
Dériver les fonctions suivantes :
$f(x) = (-2x+3)^5$.
$g(x) = \sqrt{3x-9}$.

Remarque
Si u est une fonction dérivable sur I et qui ne s'annule pas ($u(x) \neq 0$ sur I), alors formule $(u^n)' = n\ u^{n-1} \times u'$ est aussi vraie lorsque n est un entier négatif.

Tous ces résultats sont des cas particuliers d'une seule et unique propriété : la dérivée d'une fonction composée.

II Dérivée d'une fonction composée

Théorème (admis)
Soient $u : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

Remarque
La fonction f se note $g \circ u$ (prononcer "g rond u"). La formule précédente s'écrit :

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$$

Théorème (cas particulier)
Soient $u : \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ une fonction affine, et v une fonction dérivable sur l'intervalle J. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = v(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

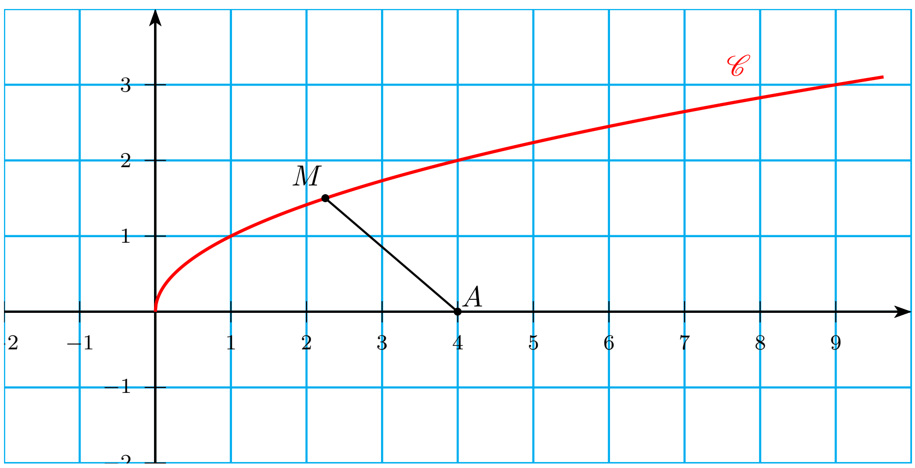
$$f'(x) = a \times v'(ax+b).$$

Remarque
Rappelons les formules de dérivées qui utilisent ce théorème :
Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Si u ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.
2. Si $u > 0$ sur I, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
4. Si $f(x) = u(ax + b)$, alors $f'(x) = au'(ax + b)$.

III Exercice

Exercice 2 (distance d'un point à une courbe)
Soit f la fonction racine carrée, dont on considère la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.



On considère le point fixe $A(4; 0)$, et le point mobile M appartenant à $\mathscr{C}$ et d'abscisse x. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $M(x; \sqrt{x})$.
L'objectif est de déterminer la valeur de x pour laquelle la distance AM est minimale.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, que peut-on conjecturer sur le minimum de la distance AM lorsque x décrit $[0; +\infty[$?
2. Soit $x \geqslant 0$. Exprimer la distance AM en fonction de x. On appelle d cette fonction qui à x associe la distance AM.
3. Étudier les variations de la fonction d, et démontrer la conjecture précédente.
4. Justifier qu'au point M_0 qui rend la distance AM minimale, la tangente à la courbe de la fonction f est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM_0}$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle isocèle en A, de périmètre 20. On pose $BC = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.

1. Montrer que l'aire du triangle ABC est $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{100 - 10x}$, pour $0 \leqslant x \leqslant 10$.
2. (a) Étudier les variations de f sur $[0; 10]$.
   (b) Pour quelle valeur de f l'aire est-elle maximale ? Quelle est alors la nature du triangle ?
   (c) Déterminer x tel que l'aire du triangle soit 10.