BTS – Matrices

I Matrices

Une matrice est un tableau de nombres réels permettant de représenter une situation comportant plusieurs entrées et sorties.

Définition
Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients réels.

Exemple :

— La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.
— a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la 2^{e} ligne et de la 3^{e} colonne, il vaut 5.

Définition
Soit A une matrice $n \times p$.

— Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
— Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$
— Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.

Exemple :

— La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.
— La matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

— La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

— La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

Propriété (égalité de matrices)
Les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de dimension $n \times p$ sont **égales** ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.

II Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée **matrice diagonale** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— Si de plus les termes diagonaux sont tous égaux à 1, elle est appelée **matrice identité (ou matrice unité)** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

— Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

III Opérations sur les matrices

Propriété (Multiplication d'une matrice par un scalaire)
Si $A = (a_{ij})$ et $k \in \mathbb{R}$, on définit $k \times A$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = k \times a_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, alors $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Propriété (Somme de deux matrices de même taille)
Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple :
Somme de deux matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1+1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriété
Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $k; m \in \mathbb{R}$.

1. L'addition des matrices est commutative : $A + B = B + A$
2. L'addition est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. La mutiplication par un réel est distributive : $k(A+B) = kA+kB$, et $(m+k)A = mA+kA$.

Propriété (Produit de deux matrices)
Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = (c_{ik})$ définie par $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$.

Présentation du calcul :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & \boxed{2} & 0 \\ -1 & \boxed{3} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 1 \quad 0 \quad 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{c_{12}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

on a donc $c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 2 - 1 \times 3 = 2$.

On obtient donc : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque
Lorsque la matrice est carrée, il est possible de calculer les puissances successives d'une matrice.
$A^n = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$

Exercice 1
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2
2. Vérifier que $A^3 = \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$

Remarque

1. Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
2. La multiplication des matrices est associative : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
3. La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$, et $(A + B)C = AC + BC$.
4. Attention, le produit des matrices n'est pas commutatif.
   En général, (les produits étant possibles) $A \times B \neq B \times A$.
5. $A \times 0 = 0 \times A = 0$.
6. Il est possible que le produit de deux matrices soit nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

IV Inverse d'une matrice carrée

On note I_n la matrice carrée d'ordre n.

Définition
Soit A une matrice carrée carrée d'ordre n.
On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
Dans ce cas, B est unique et est appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.

Remarque
On a donc, pour une matrice A inversible, $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

Exercice 2
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB, puis BA.
2. Que peut-on en déduire ?

Remarque
Toutes les matrices ne sont pas inversibles. Par exemple, une matrice carrée nulle n'est pas inversible.

Propriété (Application à la résolution de systèmes linéaires)
Soit le système à n équations et n inconnues

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = B$.
Si A est inversible, alors le système admet une unique solution $X = A^{-1}B$.

V Exercices

Exercice 3
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \\ 8 & 9 & -3 \end{pmatrix}$. Donner les coefficients $a_{1,2}$; $a_{2,1}$; $a_{3,2}$; $a_{2,3}$

Exercice 4
Écrire explicitement les matrices.

1. $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ où $a_{i,j} = i + j$
2. $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ où $b_{i,j} = 3i - j^2$
3. $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ où $c_{i,j} = 5i(2 + j)$

Exercice 5
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1-x & 2+y & 3 \\ 0 & 4 & 3z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.
Étudier s'il existe des réels x, y et z tels que $A = B$.

Exercice 6
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les matrices $A + B$, $3A$, $-B$, et $3A - B$.

Exercice 7
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = I_3$, et $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer la matrice $M = 2A - 3B + C$. Vérifier à l'aide d'un outil numérique.

Exercice 8
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB, puis BA.
2. A-t-on $AB = B$?

Exercice 9
Proposer deux matrices A et B carrées d'ordre 2 non nulles telles que $A \times B = 0$.

Exercice 10
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2, et A^3.

Exercice 11
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, et A^3.
2. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 12
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, et A^3.

2. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 3$.

Remarque : on dit que A est nilpotente.

Exercice 13

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, et $N = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer MN et NM.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que B est l'inverse de A.

Exercice 15

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 + 3A + 2I = 0$ où I est matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire que $A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = I$
3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$ où I_3 est matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17

On se propose de résoudre le système $\begin{cases} -4x + y + 0,1z &= 1 \\ 11x - 3y - 0,2z &= 1 \\ -6x + 2y + 0,1z &= 2 \end{cases}$.

1. Vérifier que le système équivaut à $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0,1 \\ 11 & -3 & -0,2 \\ -6 & 2 & 0,1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et

   $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.
3. En déduire la résolution du système.

Exercice 18

En utilisant des matrices, résoudre le système $\begin{cases} 3x + 2y + z &= 14 \\ 2x - y + z &= 21 \\ x + 3y + 2z &= 7 \end{cases}$.

Exercice 19

En utilisant des matrices, résoudre le système $\begin{cases} x = 2 - 3y - 2z \\ 4y = -x - 3z + 3 \\ 2x + 7y + 6z = 8 \end{cases}$.

Exercice 20
L'inventaire des téléphones *Aïefone 238* et *gale-à-scie A9000*, en stock dans 3 points de vente de la grande chaîne *Patissier*, est donné par la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 15 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ où les lignes indiquent le nombre de téléphones disponibles dans chacun des trois points de vente.
Le prix de vente du *Aïefone 238* est de 999 euros,et celui du *gale-à-scie A9000* est de 555 euros.
On pose $N = \begin{pmatrix} 999 \\ 555 \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit $P = MN$.
2. Que représente la matrice P ?

Exercice 21
Pour rejoindre leur spot de surf à Lacanau, trois amis (Ulrich, Manolo et Jules) passent chacun un certain temps (en heures) dans différents moyens de transports conformément au tableau ci-dessous.

	Avion	Train	Voiture
Ulrich	0	6	1,5
Manolo	1,5	0	0,3
Jules	1	1	0,1

La matrice T représente les temps du tableau et la matrice colonne V la vitesse moyenne (en km·h^{-1}) de chaque moyen de transport (de haut en bas : avion, train, voiture).

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1,5 \\ 1,5 & 0 & 0,3 \\ 1 & 1 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 750 \\ 210 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $D = TV$.
2. Que représente la matrice D ?
3. Le tableau ci-contre donne l'impact CO^2 (en kg) et le prix (en euros) pour une heure passée dans chaque moyen de transport.

	Impact CO^2	Prix
Avion	111	172,5
Train	0,546	3,6
Voiture	1,035	5,4

   (a) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer l'impact et le prix du trajet pour chacun des amis.
   (b) Qui a fait le trajet le plus économique ? le plus écologique ?

Exercice 22
Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent pour :
— un camion : 2kg de bois et 3h de travail.
— un pantin : 500g de bois et 4h de travail.
— un puzzle : 800g de bois et 3h30 de travail.
L'entreprise produit 89 jouets au total en utilisant exactement 91kg de bois et 313h de travail.
Déterminer le nombre de camions, de pantins et de puzzles fabriqués par l'entreprise.