BTS – Matrices

I Matrices

Une matrice est un tableau de nombres réels permettant de représenter une situation comportant plusieurs entrées et sorties.

Définition
Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients réels.

Exemple :

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.
- a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la 2e ligne et de la 3e colonne, il vaut 5.

Définition
Soit A une matrice $n \times p$.

- Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$
- Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
- La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.

Exemple :

- La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.
- La matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

— La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

— La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

Propriété (égalité de matrices)
Les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de dimension $n \times p$ sont **égales** ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.

II Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée **matrice diagonale** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— Si de plus les termes diagonaux sont tous égaux à 1, elle est appelée **matrice identité (ou matrice unité)** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

— Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

III Opérations sur les matrices

Propriété (Multiplication d'une matrice par un scalaire)
Si $A = (a_{ij})$ et $k \in \mathbb{R}$, on définit $k \times A$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = k \times a_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, alors $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

> **Propriété (Somme de deux matrices de même taille)**
> Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple :
Somme de deux matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

> **Propriété**
> Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $k; m \in \mathbb{R}$.
> 1. L'addition des matrices est commutative : $A + B = B + A$
> 2. L'addition est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$
> 3. La mutiplication par un réel est distributive : $k(A+B) = kA+kB$, et $(m+k)A = mA+kA$.

> **Propriété (Produit de deux matrices)**
> Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = (c_{ik})$ définie par $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$.

Présentation du calcul :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & \boxed{2} & 0 \\ -1 & \boxed{3} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 1 \quad 0 \quad 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{c_{12}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

on a donc $c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 2 - 1 \times 3 = 2$.

On obtient donc : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque
Lorsque la matrice est carrée, il est possible de calculer les puissances successives d'une matrice.
$A^n = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$

Exercice 1
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2
2. Vérifier que $A^3 = \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$

Remarque

1. Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
2. La multiplication des matrices est associative : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
3. La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$, et $(A + B)C = AC + BC$.
4. Attention, le produit des matrices n'est pas commutatif.
   En général, (les produits étant possibles) $A \times B \neq B \times A$.
5. $A \times 0 = 0 \times A = 0$.
6. Il est possible que le produit de deux matrices soit nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.
7. Pour toute matrice A carré d'ordre n, on a $A \times I_n = I_n \times A = A$.

IV Inverse d'une matrice carrée

On note I_n la matrice carrée identité d'ordre n.

Définition
Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
Dans ce cas, B est unique et est appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.

Remarque
On a donc, pour une matrice A inversible, $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB, puis BA.
2. Que peut-on en déduire ?

Remarque
Toutes les matrices ne sont pas inversibles. Par exemple, une matrice carrée nulle n'est pas inversible.

Propriété (Application à la résolution de systèmes linéaires)
Soit le système à n équations et n inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = B$.
Si A est inversible, alors le système admet une unique solution $X = A^{-1}B$.

Exercice 3
On se propose de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 7 \\ 2x + 3y & = & -4 \end{array}\right.$ à l'aide des matrices.

1. Traduire le système par une relation $AX = B$ où A, X et B ont des matrices à prociser.
2. Donner A^{-1} à l'aide de l'exercice précédent. En déduire la résolution du système.