1re G. Interrogation n° 7
Correction du Sujet 2

Exercice 1 (cours, 3 points)

Compléter sur l'énoncé :

1. Donner la définition d'une suite (u_n) arithmétique.
   Une suite (u_n) est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant par un même nombre r.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Terme général d'une suite arithmétique.
   Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r$
3. Terme général d'une suite géométrique.
   Soit (V_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme V_0.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = V_0 \times q^n$
4. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$
5. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1.
   $$S = (\text{premier terme}) \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Exercice 2 (2 points)

Au début d'une l'expérience, la masse des bactéries mesurée dans une solution aqueuse est de 3 mg. On estime que la masse de bastéries augmente de 40 % tous les jours. On pose $B_0 = 3$ et on note B_n la masse de bactéries au bout du n-ième jour, en mg.

1. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = B_n + 0,4 \times B_n = 1,4 \times B_n.}$
2. En déduire l'expression de B_n en fonction de n. Justifier.
   Donc (B_n) est la suite géométrique de premier terme $B_0 = 3$ et de raison 1,4.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_n = B_0 \times q^n = 3 \times 1,4^n.}$
3. Déterminer la masse de bactéries présente au bout de 7 jours.
   $B_7 = 3 \times 1,4^7 \approx 31,6.$
   $\boxed{\text{Au bout de 7 jours, la masse des bactéries est d'environ 31,6 mg.}}$

Exercice 3 (3 points)

1. Calculer $S = u_5 + \cdots + u_{40}$ où (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison -7. Justifier.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = 4 - 7n$.
   Donc $u_5 = 4 - 7 \times 5 = -31$, et $u_{40} = 4 - 7 \times 40 = -276$.
   La somme S a $(40 - 5 + 1) = 36$ termes.
   $$\boxed{S = \frac{u_5 + u_{40}}{2} \times 36 = (-31 - 276) \times 18 = -5526.}$$
2. Calculer $T = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{12}$. Donner la valeur exacte et le résultat arrondi à 0,000 1 près.
   T est une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
   Il y a 13 termes puisqu'on va de $\left(\frac{2}{5}\right)^0$ à $\left(\frac{2}{5}\right)^{12}$.
   $$\boxed{T = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{13}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3} \times \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{13}\right) \approx 1,6667.}$$

Exercice 4 (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_{n+1} = 0,9u_n + 90.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = 0,9 \times 1000 + 90 = 990$, et $u_2 = 0,9 \times 990 + 90 = 981$.
2. Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   $u_2 - u_1 = 981 - 990 = -9$ et $u_1 - u_0 = 990 - 1000 = -10$.
   Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\frac{u_2}{u_1} = \frac{981}{990} \approx 0,991$, et $\frac{u_1}{u_0} = 0,99$.
   Donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, et (u_n) n'est pas géométrique.
3. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 900$.

(a) Calculer V_0 et V_1.
$V_0 = u_0 - 900 = 100$, et $V_1 = u_1 - 900 = 90$.

(b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques (raison et premier terme).

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0,9u_n + 90 - 900 \\ &= 0,9u_n - 810 \\ &= 0,9(V_n + 900) - 810 \\ &= 0,9V_n + 810 - 810 \\ &= 0,9V_n \end{aligned}$$

Donc (V_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme $V_0 = 100$.

(c) Exprimer V_n en fonction de n.
$V_n = V_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$.

4. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - 900$, soit $u_n = V_n + 900$.
Donc $u_n = 100 \times 0,9^n + 900$.

5. Soit $n \geqslant 0$. Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (100 \times 0,9^k + 900) \\ &= (\sum_{k=0}^{n} 100 \times 0,9^k) + \sum_{k=0}^{n} 900 \\ &= 100 \times \frac{1 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9} + 900 \times (n+1) \\ &= 1000(1 - 0,9^{n+1}) + 900 \times (n+1) \end{aligned}$$

Exercice 5 (2 points)

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(u_n)^2 - 7$.

1. Compléter la fonction en Python suivante d'argument n qui renvoie u_n pour un entier n donné en entrée.

```
def Terme(n) :
    u=4
    for k in range(1,n+1):
        u=2*u**2-7
    return(u)
```

2. Écrire une fonction Python d'argument $n \geqslant 0$ qui renvoie la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

```
def Somme(n) :
    u=4
    S=u
    for k in range(1,n+1):
        u=2*u**2-7
        S=S+u
    return(S)
```

Exercice 6 (2,5 points)

1. Soit la fonction Python suivante :

```
def A(n):
    L=[5*2**i for i in range(n+1)]
    return(L)
```

(a) Écrire A(4) en extension.

$\boxed{\text{On obtient } [5, 10, 20, 40, 80].}$

(b) La fonction A renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes d'une suite. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette suite. Justifier.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = 5 \times 2^n, \text{ c'est donc la suite géométrique de premier terme } u_0 = 5 \text{ et de raison } 2.}$

2. Écrire une fonction Python B d'argument n qui renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes de la suite arithmétique définie par $u_0 = 5$ et de raison 3.

```
def B(n):
    L=[5+3*k for k in range(n+1)]
    return(L)
```