1G. Correction de l'interrogation n° 8

Exercice 1 (2 points, cours)

1. Formule du cosinus.
   Soient A, B, C trois points distincts. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$
2. Expression en repère orthonormé.
   Dans un repère orthonormé, soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx'+yy'$
3. Deux expressions avec les normes.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
   (a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u}||^2+||\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2)$
   (b) et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2)$

Exercice 2 (1 point)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=4$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=-3$.

1. $(-2\overrightarrow{u})\cdot(4\overrightarrow{v}) = -2\times 4\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) = -8\times 4 = -32$.
2. $(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 4-(-3) = 7$.

Exercice 3 (5 points)

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB=2$, $BC=3$.
   Comme $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.}$
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB=6$.
   Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
   Comme ABC est isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le mileu de $[AB]$.
   D'après la formule du projeté,
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = AB\times\frac{1}{2}AB = 6\times\frac{6}{2} = 18$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18.}$
3. Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$, $A(-5;2)$, $B(-2;-1)$ et $C(4;0)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3\end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ -2\end{pmatrix}$.
   D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx'+yy' = 3\times 9-3\times(-2) = 33.$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=33.}$
4. $AB=6$, $AC=7$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$.
   D'après la formule du cosinus,
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) = 7\times 6\times\cos(\frac{\pi}{6})$
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times 6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 21\sqrt{3}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21\sqrt{3}.}$
5. $ABCD$ est un rectangle, avec $AB=6$ et $AD=2$.
   Le projeté orthogonal de C sur (AB) est le point B.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB\times AB = 6^2 = 36.}$

Exercice 4 (2 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-4;2)$, $C(1;-1)$, et $D(5-a;a)$ où a est un nombre réel. Déterminer a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

$(AB)\perp(CD)$ ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ -1\end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4-a \\ a+1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = xx'+yy' = -6(4-a)+(-1)\times(a+1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -24+6a-a-1 = 5a-25$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ssi $5a-25=0$ ssi $a=5$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $a=5$, soit $D(0;5)$.

Exercice 5 (bonus, 1 point)

On traitera, au choix, une seule des deux questions suivantes

1. Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $BC=3$, et $AC=6$.
   Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   Par la relation de Chasles sur les vecteurs, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
   D'après une formule du produit scalaire avec les normes,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2+||\overrightarrow{AC}||^2-||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-||\overrightarrow{CB}||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(16+36-9)\\ &= \frac{43}{2}\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21.5.}$
2. Soit $ABCD$ un losange de centre O, tel que $AC=6$ et $BD=14$.
   Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   On procède par relation de Chasles et linéarité.
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\\ &= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}\\ &= AO^2+0+0-OB^2\\ &= 3^2-7^2\\ &= -40\end{aligned}$$