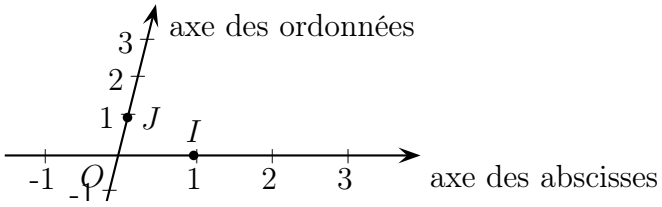
Chapitre 4 : Repérage et vecteurs dans le plan
(Première partie)

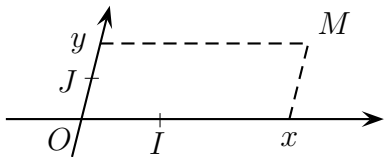
I Repérage dans le plan

Définition
On définit un repère du plan par la donnée de 3 points non alignés O, I et J. Le repère se note $(O;I;J)$. O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses, la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.



Remarque
Les longueurs OI et OJ définissent l'unité de longueur sur les axes.

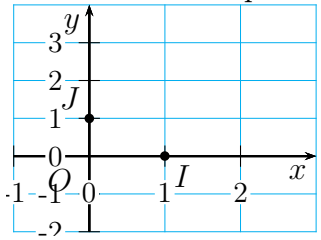
Définition (et propriété admise)
Dans un repère du plan $(O;I;J)$, tout point M est déterminé par un unique couple de réels $(x;y)$.
x est l'abscisse de M, et y est l'ordonnée de M.
On lit les coordonnées du point en traçant des parallèles aux axes du repère.



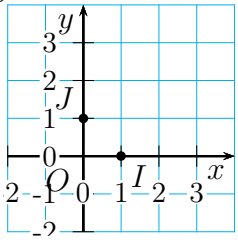
Exercice 1

1. Construire un parallélogramme $ABCD$.
2. On se place dans le repère $(A;B;D)$. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Placer le point E de coordonnées $(-1;2)$ dans le repère $(A;B;D)$.

Remarque (cas particuliers)
Le repère est orthogonal lorsque les axes du repère sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$ (le triangle OIJ est rectangle en O).
Le repère est orthonormé si les axes sont perpendiculaires et si l'on a la même unité de longueur sur les deux axes : $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.
Cela revient à dire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.



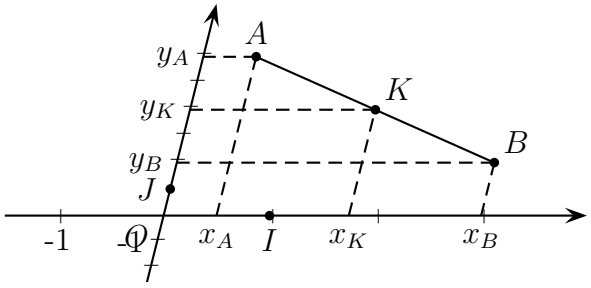
Repère orthogonal :
$(OI) \perp (OJ)$.



Repère orthonormé :
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

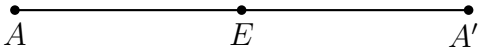
Propriété (coordonnées du milieu d'un segment)
Dans un repère du plan, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, avec x_A, y_A, x_B, y_B réels.
Les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$ sont données par :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Remarque (Symétrique par une symétrie centrale)
La propriété des coordonnées du milieu peut également servir à déterminer les coordonnées d'un point symétrique par une symétrie centrale.

(A' est le symétrique de A par rapport à E) équivaut à (E est le milieu de $[AA']$).

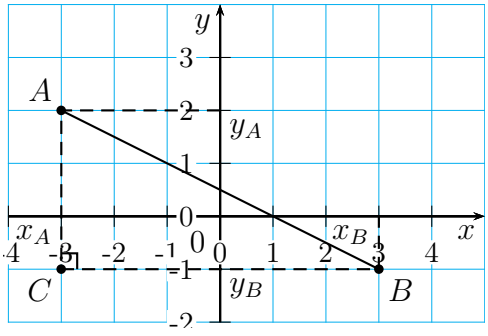


Exercice 2

1. Dans un repère du plan, placer les points $A(-2; -1)$, $B(-4; 7)$ et $E(3; 1)$.
2. Calculer les coordonnées du milieu K de $[AB]$, puis placer K.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du symétrique A' de A par rapport à E, puis placer A' sur la figure.

Propriété (distance entre deux points)
On se place dans un repère **orthonormé** du plan.
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points (x_A, y_A, x_B, y_B réels).
La distance AB (longueur du segment $[AB]$) est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Démonstration
On se place dans le cas où $x_A < x_B$ et $y_A > y_B$ (voir ci-dessus).
Soit C le point qui a la même abscisse que A et la même ordonnée que B.
Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
Or, $BC = x_B - x_A$ et $AC = y_A - y_B$.
Donc

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 \\ AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2} \end{aligned}$$

En effet, $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$ (deux nombres opposés ont le même carré).
Les autres cas se montrent de façon analogue. □

Exercice 3

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-2;1)$, $B(4;-1)$ et $C(-1;4)$.
2. Calculer les longueurs AB, AC, et BC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

II Vecteur et translation

Définition
Soient A et B deux points du plan.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui transforme A en B) est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que les segments $[AM']$ et $[BM]$ aient le même milieu.
Autrement dit, le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

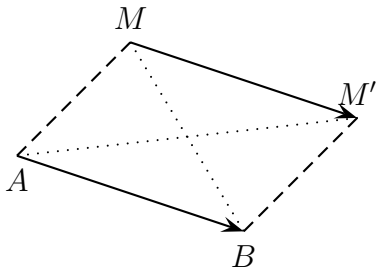
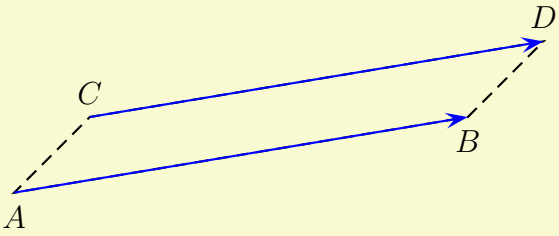


Illustration dans le cas où $M \in (AB)$:

Définition (Vecteurs égaux)
Soient A, B, C, D quatre points du plan.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque la translation qui envoie A en B envoie aussi C en D.
Lorsqu'il est défini, cela revient à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

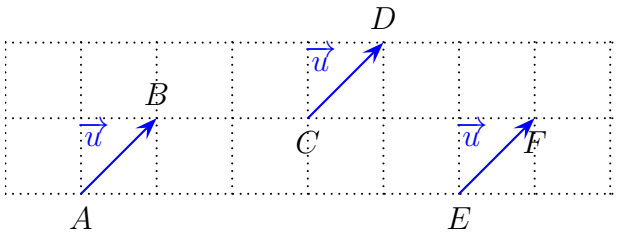


Lorsque $A \neq B$ et $C \neq D$, on a l'équivalence :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Remarque

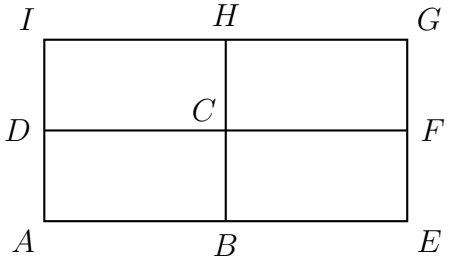
1. Attention à l'ordre des points en nommant le parallélogramme.
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
2. On peut représenter un même vecteur n'importe où dans le plan.
   Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on peut dire que ces vecteurs sont des représentants d'un même vecteur $\overrightarrow{u}$.



3. Si $A = B$, (les points A et B sont confondus), la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ laisse chaque point du plan invariant.
   On dit que le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, et on note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

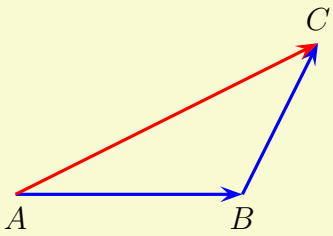
Exercice 4
Lister dans la figure tous les vecteurs égaux au vecteur donné.

1. $\overrightarrow{AB} = \ldots$
2. $\overrightarrow{AD} = \ldots$
3. $\overrightarrow{IC} = \ldots$



III Addition de vecteurs

Théorème (et définition)
Soient A, B et C trois points du plan.
Appliquer successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



On définit l'addition entre les vecteurs par la relation de Chasles :

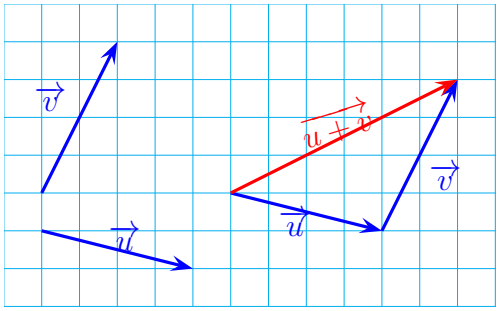
$$\text{pour tous points } A, B \text{ et } C \text{ du plan, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Exercice 5
Étudier dans chaque cas si l'on appliquer la relation de Chasles. Si oui, le faire.

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
3. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DA}$

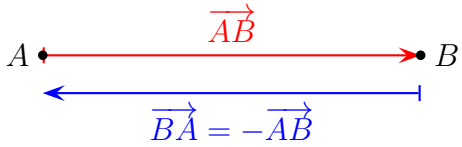
Remarque

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
   Pour représenter le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, on place les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bout à bout.



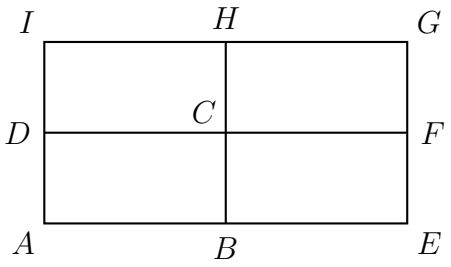
2. L'addition sur les vecteurs est commutative.
   Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
3. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, et on note

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$



Exercice 6
On reprend la figure de l'exercice 1. Simplifier les sommes de vecteurs suivantes.

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
2. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD}$
4. $\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{FB}$
5. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AE}$
6. $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{GF}$
7. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IC}$
8.



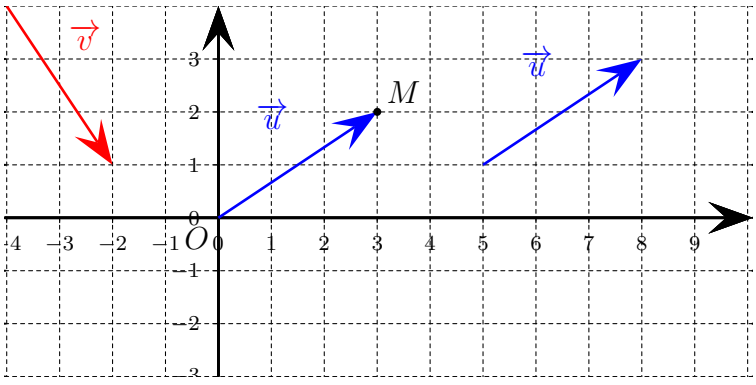
Remarque
On peut caractériser le milieu d'un segment avec des vecteurs :

$$\begin{aligned} I \text{ est le milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

IV Coordonnées d'un vecteur

Définition
Soient $(O; I; J)$ un repère du plan, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Illustration : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Remarque
Les coordonnées d'un vecteur traduisent les variations en abscisses et en ordonnées entre le point de départ et son extrêmité.
On note les coordonnées d'un vecteur en colonne.

Exercice 7

1. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté. $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$
2. Représenter ci-dessus les vecteurs $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Propriété
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
Alors,

1. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ si et seulement si ($x=x'$ et $y=y'$).
   Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
2. Le vecteur $-\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{u+v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Propriété
Dans un repère du plan, soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Démonstration
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Il suffit de passer aux coordonnées dans cette relation pour obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. □

Exercice 8
Dans un repère du plan, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $A(1;-4)$.
Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{u}$.

Exercice 9
Dans un repère du plan, on donne $A(-4;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;2)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Propriété (et définition, admise)
Dans un repère **orthonormé** du plan, on considère les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le réel positif noté $||\overrightarrow{u}||$ défini par $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$.
   Si M est le point tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{u}$, la norme de $\overrightarrow{u}$ est la longueur du segment $[OM]$:
   $$||\overrightarrow{u}||=OM=\sqrt{x^2+y^2}.$$
2. Rappel.
   La distance AB est donnée par
   $$AB=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$