Combinatoire

I Permutations

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. E est un ensemble à n éléments.
Rappel : Un k-uplet d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments de E.

Propriété (nombre de k-uplets d'éléments distincts)
Soit k un nombre entier, $1 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre de k-uplets d'éléments **distincts** d'un ensemble à n éléments est $\underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}$

Démonstration
Choisir un k-uplet revient à remplir k cases avec des éléments distincts de E.
- Il y a n choix pour la 1re case.
- Il y a $(n-1)$ choix pour la 2e case
- On itère le procédé.
- À la dernière case, les cases 1, 2, …, $(k-1)$ sont complétées.
  Il reste donc $n-(k-1) = n-k+1$ chox pour la dernière case. □

Définition (permutation)
Soit E un ensemble fini à n éléments.
Une permutation de E est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Exercice 1
Lister toutes les permutations de $\{a; b; c\}$.

Pour déterminer le nombre total de permutations, on applique la propriété avec $k = n$.

Propriété (et définition)
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Le nombre $n!$ est appelé factorielle n.

Remarque
Par convention, $0! = 1$.

Conséquence
Le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments s'écrit aussi $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
En effet, $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1)) \times (n-k)!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$

Exemple :
Le nombre de 4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 6 éléments est :
$\dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$

II Combinaisons

Définition
Soit E un ensemble à n éléments avec $n \in \mathbb{N}$. Soit un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Une combinaison de k éléments de E est une partie de E ayant k éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E se note $\binom{n}{k}$ (lire "k parmi n").

Exemple :
Soit $E = \{a; b; c\}$.
$\{b; c\}$ est une combinaison de deux éléments de E.

Exercice 2
Lister toutes les combinaisons ayant 2 éléments de $E = \{a; b; c\}$. En déduire $\binom{3}{2}$.

Remarque
Dans un arbre de probabilités "succès-échec" à n niveaux (schéma de Bernoulli), le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès est $\binom{n}{k}$ (appelé aussi coefficient binomial).

Propriété
Pour tous entiers naturels n et k avec $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et si } 1 \leqslant k \leqslant n, \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Démonstration

— Si $1 \leqslant k \leqslant n$, à une combinaison $F = \{a_1; \dots; a_k\}$ de k éléments de E, on associe $k!$ permutations de F. On obtient ainsi tous les k-uplets d'éléments distincts de F.
En faisant de même pour toutes les combinaisons de k éléments de E, on obtient tous les k-uplets d'éléments distincts de E.
Donc $\binom{n}{k} \times k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$, soit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.
D'après la conséquence du I, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

— Si $n \geqslant 1$ et $k = 0$, on a vu que $\binom{n}{0} = 1$, et on a bien $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.

— Enfin, si $n = k = 0$, $E = \varnothing$, et $\binom{0}{0} = 1$, et $\frac{0!}{0!0!} = 1$. □

Remarque (des cas particuliers)

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $\binom{n}{0} = 1$
2. Pour tout $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$
3. Pour tout $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 3
Calculer sans calculatrice.
$\binom{12}{0} =$ $\binom{17}{1} =$ $\binom{6}{2} =$

Remarque (Coefficients binomiaux avec la calculatrice)
Voici comment obtenir les coefficients binomiaux à la calculatrice.

	Casio	Texas	Numworks
Chemin	Opt PROB	Math Prob Combinaison	Outils Proba Dénombrement
$\binom{n}{k}$	`nCr`	`nCk`	$\binom{n}{k}$

Exercice 4
Vérifier que $\binom{8}{3} = 56$, puis déterminer $\binom{12}{3} =$ et $\binom{21}{10} =$

III Propriétés des coefficients binomiaux, triangle de Pascal

Propriété (Propriété des coefficients binomiaux)
— Symétrie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
— Formule du triangle de Pascal :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geqslant 1)$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Démonstration
1. Symétrie.
Dans un arbre "succès-échec" à n niveaux, il y a autant de chemins réalisant k succès que de chemins réalisant k échecs, c'est-à-dire $(n-k)$ succès.
2. Triangle de Pascal.
Méthode 1 : dénombrement
$\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins réalisant $(k+1)$ succès sur $(n+1)$ épreuves.
On peut les scinder en 2 groupes disjoints :
— ceux qui commencent par un succès : il y en a $\binom{n}{k}$ car il faut ensuite k succès sur n tentatives.
— Ceux qui commencent par un échec : il y en a $\binom{n}{k+1}$ car il faut ensuite $(k+1)$ succès sur n épreuves.
D'où le résultat : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Méthode 2 : calcul avec les factorielles.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}\\ &= \frac{n!\times(k+1)}{k!(n-k)!\times(k+1)}+\frac{n!\times(n-k)}{(k+1)!\times[n-(k+1)]!\times(n-k)}\\ &= \frac{n!\times[(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!\times(n-k)!}\\ &= \frac{n!\times(n+1)}{(k+1)!\times(n-k)!}\end{aligned}$$

Or, $n!\times(n+1)=(n+1)!$, et $(n-k)=(n+1)-(k+1)$, donc $(n-k)!=[(n+1)-(k+1)]!$.
Ainsi, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}=\binom{n+1}{k+1}$. □

Le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7									
8									

Par exemple, $\binom{4}{2}=6$, et $\binom{6}{3}=20$.

Exercice 5
Compléter la ligne $n=7$ du triangle de Pascal. Sans calculatrice, en déduire $\binom{7}{3}$.

$\binom{7}{3}=$

Remarque
En sommant les coefficients binomiaux sur une même ligne dans le triangle de Pascal, on peut observer le résultat suivant :

Propriété
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Démonstration
La démonstration se fait en comptant de 2 façons le nombre total de partie d'un ensemble à n éléments.

- C'est le cardinal de $\mathscr{P}(E)$, et on a vu que $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.
- Le nombre total est aussi :
  nombre de parties ayant 0 élément + nombre de parties ayant 1 élément + ...+ nombre de parties ayant n élément.

□

Remarque
Les coefficient binomiaux interviennent aussi dans la formule qui donne le développement de $(a+b)^n$:

pour tous réels a et b, et pour tout entier $n \geqslant 1$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple :
Pour tous réels a et b,
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$(a+b)^4 =$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$