Correction du dm n° 9

Exercice 1

On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$. Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E. Le but du problème est de déterminer l'aire colorée minimale, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

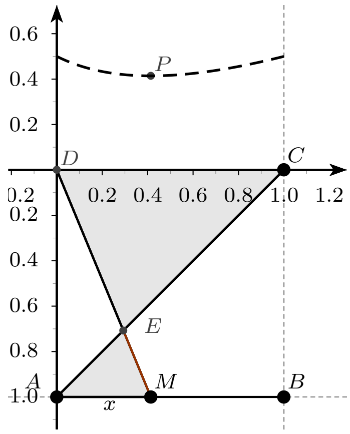
1. **Étude expérimentale**

   (a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   (b) On s'intéresse à la valeur minimum de l'aire de la surface colorée, que l'on note $\mathcal{A}$. Quelle variable, notée x, choisir ?

   $\boxed{\text{On choisit comme variable la longueur } AM\text{, on pose donc } AM = x.}$

   (c) Faire afficher par le logiciel le lieu des points de coordonnées $(x, \mathcal{A})$.



   (d) Émettre une conjecture qui répond au problème posé.

   $\boxed{\text{Il semble que } \mathcal{A} \text{ soit minimale pour } AM \approx 0,41 \text{ et que l'aire } \mathcal{A} \text{ minimale soit environ } 0,41.}$

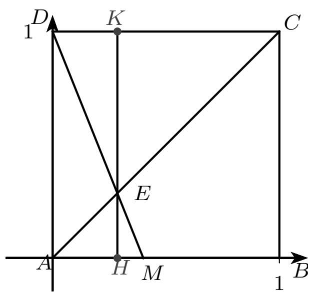
2. **Étude algébrique**

   On pose $AM = x$ et on note H et K les pieds des hauteurs issues de E dans les triangles EAM et ECD.

   (a) À quel intervalle appartient x ?

   $\boxed{\text{Comme } M \in [AB] \text{ et que } AB = 1, \text{ on a } x \in [0; 1].}$

   (b) Démontrer que $EH = \dfrac{x}{x+1}$ et $EK = \dfrac{1}{x+1}$.



   Si $M = A$, alors $H = E = A$, et $K = D$, et l'on a $EH = 0$, et $EK = 1$, ce qui convient avec les expressions $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{1}{x+1}$ lorsque $x = 0$.
   Désormais, on suppose que M est distinct de A.

   Dans le triange ADM, les droites (EH) et (AD) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{EH}{AD}$.
   Or, le triangle AHE est rectangle isocèle en H, et l'on a donc $HA = HE$.
   En notant $a = EH$ la longueur que l'on cherche à exprimer, on cela donne $\dfrac{x-a}{x} = \dfrac{a}{1}$.
   On va isoler $EH = a$ dans cette dernière relation.
   Par produit en croix, $ax = x - a$ puis $a(1 + x) = x$, et enfin $a = \dfrac{x}{1+x}$.

   $\boxed{\text{On a donc } EH = \dfrac{x}{1+x}.}$ $\boxed{\text{Comme } EH + EK = 1,\ EK = 1 - EH = \dfrac{1}{1+x}.}$

   (c) En déduire qu'une expression de l'aire colorée est $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.

   $$Aire(AME) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AM \times EH}{2} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{2(x+1)}.$$

$Aire(CDE) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{CD \times EK}{2} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2(x+1)}.$

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}.}$

(d) Démontrer la conjecture du 1.
$x+1=0$ ssi $x=-1$. Donc $x+1$ ne s'annule pas sur $[0;1]$.
Par quotient de fonctions dérivables, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0;1]$.
Pour tout $x \in [0;1]$, $\mathcal{A}'(x) = \dfrac{2x(2x+2)-(x^2+1)\times 2}{4(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+4x-2}{4(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2}$.
Un carré est toujours positif, et $x+1$ ne s'annule pas sur $[0;1]$, donc pour tout $x \in [0;1]$, $2(x+1)^2 > 0$.
Donc $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de x^2+2x-1.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4+4 = 8 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \approx -2,41$. $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} \approx 0,41$.
Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$\mathcal{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}(x)$	$1/2$	$\searrow$	$\mathcal{A}(\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	$1/2$

$\mathcal{A}(\sqrt{2}-1) = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{2(\sqrt{2}-1+1)} = \dfrac{3-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$

$\boxed{\text{Donc l'aire étudiée est minimale pour } AM = \sqrt{2}-1 \approx 0,4142 \text{ et l'aire minimale est } \sqrt{2}-1 \approx 0,4142.}$

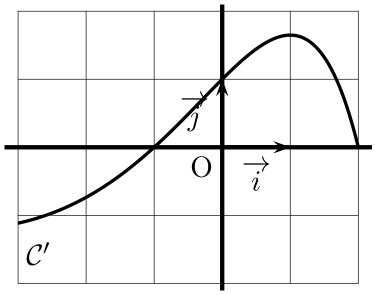
Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée** f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.



1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3,-1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
   Sur l'intervalle $[-3,-1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative ou nulle.
   L'affirmation est VRAIE.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
   Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on lit que $f'(x) \geqslant 0$, donc que f est croissante sur cet intervalle.
   L'affirmation est VRAIE.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
   Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0]$. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les réels de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1.
   L'affirmation est FAUSSE.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
   Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation
   $y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y-(-1) = 1x \iff y = x-1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente.
   L'affirmation est VRAIE