Chapitre 14 : Probabilités

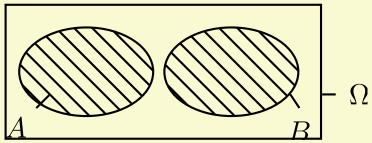
I Vocabulaire des probabilités

Définition
Une **expérience aléatoire** est une expérience qui peut produire des résultats différents si on la répète dans les mêmes conditions.
L'ensemble des issues possibles est appelé **l'univers** et se note Ω (Omega).

Définition
Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.
Lorqu'il ne contient qu'une seule issue, c'est un **événement élémentaire**.

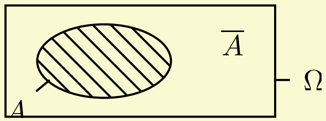
Exemple : on lance un dé cubique.
Considérons l'événement A : "On obtient un nombre pair". $A = \{2; 4; 6\}$
L'événement B : "le dé donne 1" est un événement élémentaire car il ne contient qu'une seule issue. $B = \{1\}$.

Définition
Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \varnothing$ (leur intersection est vide).



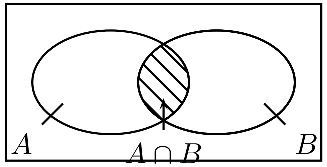
Remarque
Deux événements élémentaires sont toujours incompatibles.

Définition
l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ (lire "A barre") est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.



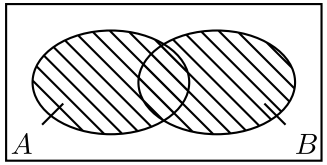
Remarque
A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Rappels :
L'**intersection** de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

La **réunion** de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Exercice 1
On lance un dé cubique et on note le résultat obtenu (sur la face du dessus).

1. Décrire l'univers Ω (lister toutes les issues possibles).
2. Donner un événement élémentaire.
3. Lister les issues de l'événement A : "On obtient un nombre pair".
4. Décrire par une phrase l'événement $\bar{A}$, contraire de A, et lister les issues qui le réalisent.
5. Notons B : "on obtient un nombre supérieur ou égal à 5".
   Donner un événement incompatible avec B.

II Probabilités

Définition (Probabilité)
Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers fini lié à une expérience aléatoire.
Cette notation signifie que l'univers est composé de n issues notés e_1,..., e_n.
On définit une loi de probabilité sur Ω lorsqu'à chaque issue e_i on associe un nombre positif ou nul p_i, et que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

On dit que p_i est la probabilité de e_i et on note naturellement $p_i = p(e_i)$.
Alors, la probabilité d'un événement A quelconque est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Remarque
On a toujours $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

Exercice 2
On donne ci-dessous la loi de probabilité associée au lancer d'un dé cubique.

issues e_i	1	2	3	4	5	6
probabilités p_i	0,1	0,15	0,2	0,15	0,3	0,1

1. Vérifier que ce tableau correspond à la définition d'une loi de probabilité.
2. On note A : Obtenir un nombre pair.
   (a) Écrire A en listant toutes les issues qui le réalisent.
   (b) Calculer $P(A)$.
3. Déteminer la probabilité de l'événement B : "on obtient un résultat supérieur ou égal à 4".

Théorème (propriétés des probabilités, admis)
Soient A et B des événements d'un univers Ω.

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
3. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
4. $P(\Omega) = 1$, et $P(\varnothing) = 0$.
5. Pour tous événements A et B on a :
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Remarque
Comme $P(\Omega) = 1$, et $P(\varnothing) = 0$, Ω est appelé l'événement certain, et $\varnothing$ l'événement impossible.

Exercice 3
On reprend les données de l'exercice précédent.

issues e_i	1	2	3	4	5	6
probabilités p_i	0,1	0,15	0,2	0,15	0,3	0,1

On note A : "on obtient un nombre pair".
On note B : "on obtient un résultat supérieur ou égal à 4".

1. Décrire $\overline{A}$ et déterminer sa probabilité.
2. Décrire $A \cap B$ et déterminer sa probabilité.
3. Décrire $A \cup B$ et déterminer sa probabilité.

Exercice 4
Dans un univers Ω, on donne deux événements incompatibles A et B tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,7$.
Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ et $P(\overline{B})$.

III Équiprobabilité

Définition (Équiprobabilité)
On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemple On lance un dé cubique équilibré.
L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

Théorème (Équiprobabilité)
S'il y a équiprobabilité, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{nb d'éléments de } A}{\text{nb d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

card désigne le nombre d'éléments.

Exercice 5
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Chaque carte a la même probabilité d'être choisie.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : "la carte est un As".
   (b) B : "la carte est un Cœur"
2. Décrire par une phrase $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire par une phrase $A \cup B$ et calculer sa probabilité.

IV Lien entre statistiques et probabilités

Théorème (admis)
Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences d'un résultat ont tendance à devenir de plus en plus proches de la probabilité de ce résultat.

Exemple : Si l'on lance un dé équilibré un très grand nombre de fois, les fréquences d'apparition du 2 deviennent proches de $P(2) = \frac{1}{6}$.

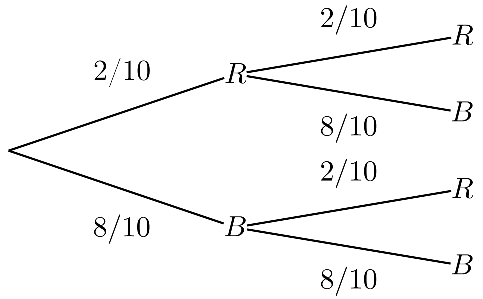
V Arbres de probabilités

On utilise un arbre de probabilités pour représenter une expérience qui se déroule en plusieurs étapes.

Méthode :
- Un niveau de l'arbre représente une étape de l'expérience.
- On place les événements aux bouts des branches et les probabilités sur les branches.
- À chaque niveau de l'arbre, la somme des probabilités sur les branches qui se rejoignent à un même nœud fait 1.
- La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur le chemin correspondant à cette issue.

Exercice 6 (corrigé)
Une urne contient 2 boules rouges (R) et 8 boules blanches (B).
On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. Représenter l'expérience par un arbre de probabilités.



2. Décrire l'univers Ω sous forme d'ensemble.
   L'univers est $\Omega = \{(R;R); (R;B); (B;R); (B;B)\}$.
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E : "on obtient deux boules rouges".
   Il n'y a qu'une issue qui réalise E.
   $E = \{(R;R)\}$.
   $P(E) = P(R;R) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0,04$.
   (b) F : "on obtient deux boules de couleurs différentes".
   Il y a deux issues qui réalisent F.
   $F = \{(R;B); (B;R)\}$.
   $P(F) = P(R;B) + P(B;R) = \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{16}{100} + \frac{16}{100} = 0,32$

Exercice 7
Reprendre l'exercice précédent avec une urne composée de 5 boules rouges (R) et une boule blanche (B), et où l'expérience consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne.