Chapitre 15 : Intégration

I Primitives

Calculer une primitive d'une fonction, c'est faire le calcul réciproque de la dérivée, et les deux notions sont liées du point de vue calculatoire.
La primitive s'interprète géométriquement comme l'aire située sous la courbe d'une fonction, l'axe des abscisses, et deux droites verticales.
D'un point de vue physique, la primitive de la vitesse donne la distance parcourue. La primitive de la puissance instantanée permet de calculer la puissance moyenne ou l'énergie dépensée.

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que ....

Exemple :
Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + 3$, et $F(x) = 3x^2 + 3x + 1$.
On constate que $F'(x) = 3 \times 2x + 3 = 6x + 3 = f(x)$.
On dit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$.

1. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   ....
   ....
2. La fonction G définie par $G(x) = \frac{5}{2}x^2 - x + 13$ est-elle une primitive de f ? Justifier.
   ....
   ....

Propriété (admis)
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

1. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, où k est une constante.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Remarque
Dès lors qu'une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle, et deux primitives diffèrent seulement d'une constante.

Exercice 2
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

1. Trouver une primitive F de f. Justifier.
2. Donner la forme générale des primitives de la fonction f.
3. Déterminer la primitive G de f qui s'annule en 3.

I.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$, $(a \in \mathbb{R})$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) =$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) =$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$

I.2 Opérations sur les primitives

Propriété (admise)
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle sur I, de primitives respectives F et G.

1. Une primitive de $f + g$ est $F + G$.
2. Pour toute constante $k \in \mathbb{R}$, une primitive de kf est kF.

Propriété (composée)
Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est ...
2. Si $u(x) > 0$ sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est ...
3. Une primitive de $u' \times u^n$ avec $n \geqslant 1$ est ...
4. Pour $n < -1$ et avec u ne s'annulant pas sur I, une primitive de $u' \times u^n$ est ...

Exercice 3
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

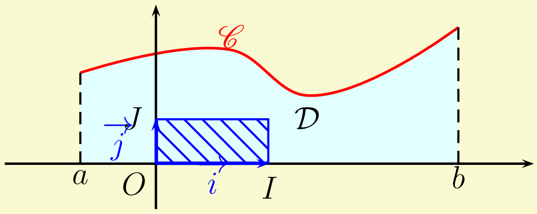
1. $f(x) = x^4$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
4. $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$
5. $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$
6. $f(t) = -3\sin(5t + \dfrac{\pi}{2})$
7. $f(x) = 12x(2x^2 - 1)^3$
8. $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}$
9. $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

II Intégrale d'une fonction positive

II.1 Définition

Définition

1. Dans un repère orthogonal $(O; I; J)$, on appelle unité d'aire l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.
2. Soient f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



On appelle intégrale de f de a à b l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine démilité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

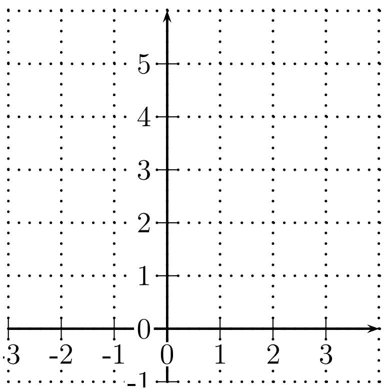
Cette intégrale se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ et se lit « intégrale de a à b de f ».

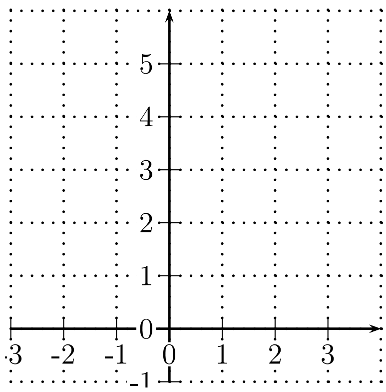
Remarque
La variable x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs. On dit qu'elle est muette.

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4
Pour chaque fonction f, tracer sa courbe représentative puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x$.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = 4 - x$



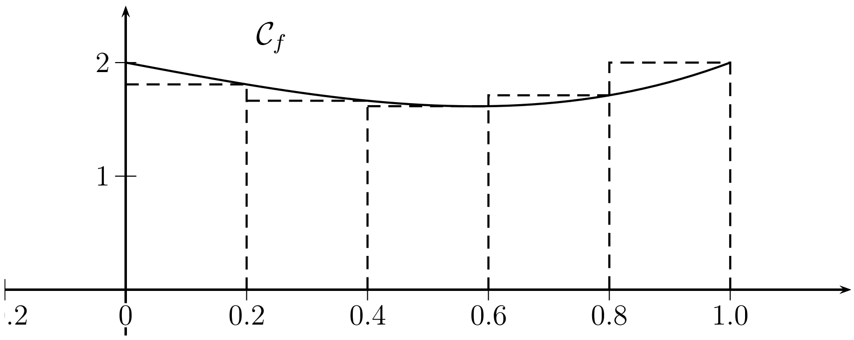


III Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Exercice 5 (méthode des rectangles pour approcher une intégrale)
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 2$.

On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

Pour cela, on partage l'intervalle $[0;1]$ en 5 intervalles de même amplitude, et on construit des rectangles comme indiqué ci-dessous.



1. Compléter le tableau en utilisant la calculatrice.

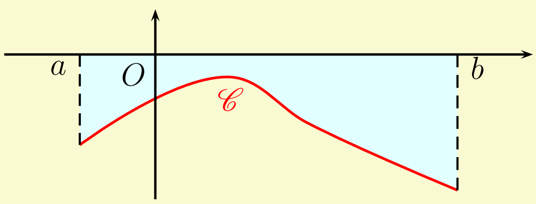
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$						

2. Exprimer à l'aide de f la hauteur du premier rectangle, puis calculer son aire.
....
....
3. Déterminer une valeur approchée de l'intégrale I.
....
....
....
4. Généralisation
On admet que pour de grandes valeurs de l'entier non nul n, la somme S_n constitue une bonne approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

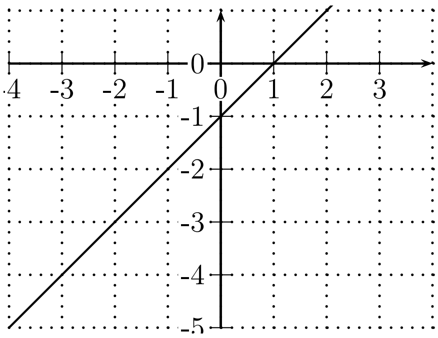
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \times \frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \times \frac{1}{n}$$

Définition (intégrale d'une fonction négative)
Soit f est une fonction négative sur $[a;b]$.
Notons $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}.$$



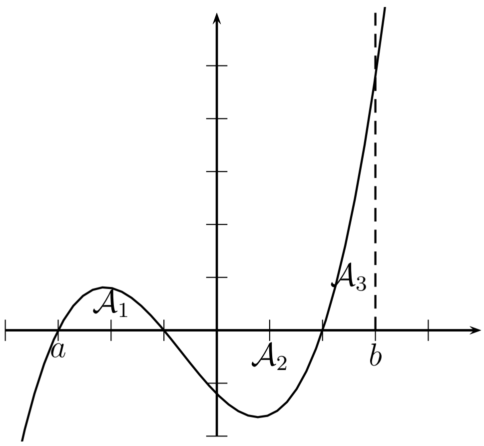
Exercice 6
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$.



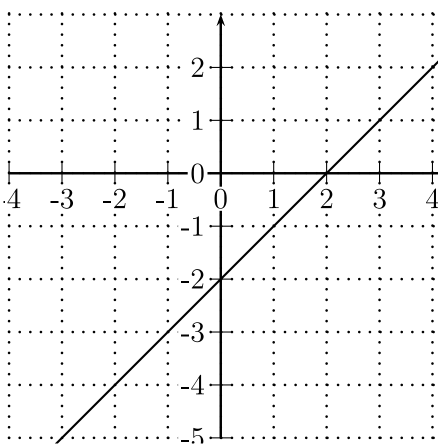
1. Justifier que f est négative sur $[-3;1]$.
2. Calculer $I = \int_{-3}^{1} (x-1)\,\mathrm{d}x$, et $J = \int_{-3}^{-1} (x-1)\,\mathrm{d}x$

Définition (intégrale d'une fonction qui change de signe)
Soit f une fonction dont le signe varie sur $[a;b]$.
L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines où f garde un signe constant.

Sur cette illustration, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.



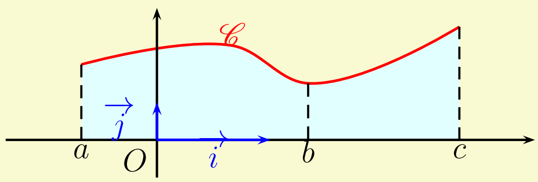
Exercice 7
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$.



Calculer $I = \int_{-2}^{3} (x-2)\,\mathrm{d}x$

IV Propriétés des intégrales

Propriété
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I, et k un réel quelconque.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Linéarité de l'intégrale :
   (a) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Relation de Chasles :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$


5. Croissance de l'intégrale.
   Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

V Lien entre intégrale et primitives

Théorème (fondamental, admis)
Si f est une fonction définie sur $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

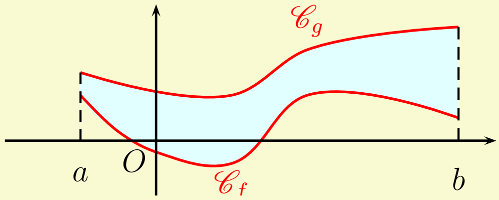
Propriété (lien entre intégrla et primitive)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. Si F est une primitive de f sur I, alors
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

La valeur $F(b) - F(a)$ est indépendante du choix de la primitive F.
On peut noter $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Exercice 8
À l'aide d'une primitive, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

VI Applications du calcul intégral

Propriété (aire comprise entre deux courbes)
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ et telles que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
Alors l'aire de la surface comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\displaystyle\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.



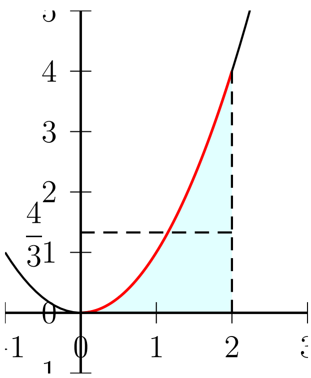
Définition (valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle)
Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque
Cette égalité s'écrit aussi $m(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Ainsi, pour une fonction positive, m est la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ qui a la même aire que l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Dans le cas général, la valeur moyenne de f est la valeur de la fonction constante qui a la même intégrale que f.

Exemple : Calculons la valeur moyenne de la fonction carré sur $[0;2]$.

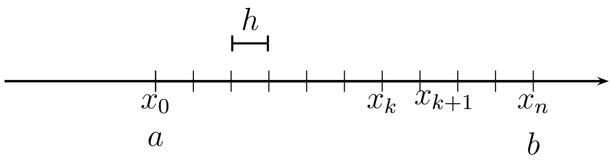
$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - 0\right) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

L'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$ est égale à l'aire du rectangle de hauteur $\dfrac{4}{3}$ et de largeur 2.



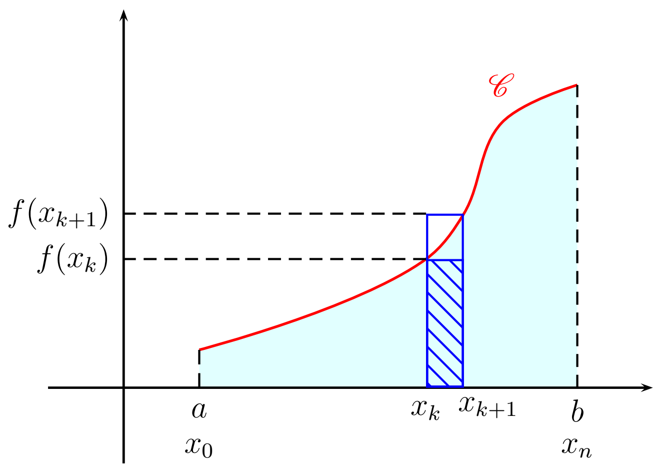
VII Algorithme de la méthode des rectangles pour encadrer une intégrale

On suppose que la fonction f est continue, positive, et monotone sur l'intervalle $[a; b]$.
Pour approcher l'intégrale de a à b de f, on partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$.
On pose $x_0 = a$, et pour $0 \leqslant k \leqslant n$ $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n} = x_0 + k \times h$.



Sur chacun de ces intervalles $[x_k; x_{k+1}]$, on peut encadrer l'aire sous la courbe de f par des aires de rectangles.
Dans le cas où f est croissante sur $[x_k; x_{k+1}]$, on a

$$h \times f(x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_{k+1})$$



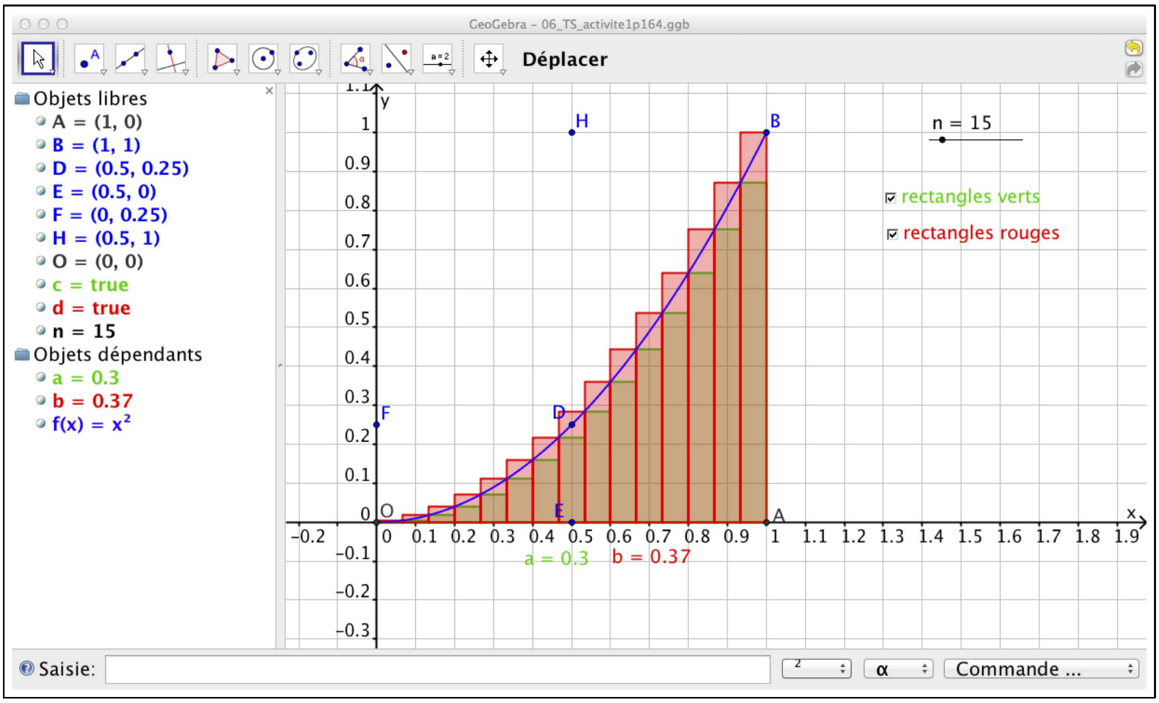
D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}x$.
L'aire sous la courbe de f sur $[a; b]$ est alors comprise entre la somme des aires des rectangles « sous » la courbe et la somme des aires des rectangles « au-dessus » de la courbe.

Toujours dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$, on obtient l'encadrement

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$$

soit

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$



Algorithme associé à la méthode des rectanges :

DÉBUT
Entrer f, a, b, n.
h prend la valeur $\dfrac{b-a}{n}$
x prend la valeur a
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à $n-1$
  U prend la valeur $U + h \times f(x)$
  x prend la valeur $x + h$
  V prend la valeur $V + h \times f(x)$
Fin pour
Afficher U, V
FIN

Remarque

1. Dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$, on a
$$U \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant V.$$
Si f est décroissante sur $[a; b]$, l'algorithme reste valable et on a cette fois
$$V \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant U.$$
2. La méthode des rectangle et l'algorithme restent valables dans le cas où f est seulement continue et monotone sur $[a; b]$ (f de signe quelconque, voir paragraphe IV).

Programmation de l'algorithme à la calculatrice

Texas

La fonction f étant entrée dans Y_1.

```
Prompt A,B,N
(B − A)/N → H
A → X
0 → U
0 → V
For(K, 0, N − 1)
U + H ∗ Y1(X) → U
X + H → X
V + H ∗ Y1(X) → V
End
Disp U,V
```

Attention : Y_1 s'obtient par $\boxed{\text{var}}$, VAR-Y, Fonction, Y_1.

Exemple : $f(x) = x^2$, $I = [0; 1]$.
Avec $n = 10$, on a $U = 0,285$ et $V = 0,385$.
Avec $n = 100$, $U = 0,32835$ et $V = 0,33835$.

Casio

La fonction f étant entrée dans Y_1.

```
? → A
? → B
? → N
(B − A)/N → H
A → X
0 → U
0 → V
For 0 → K To N − 1
U + H ∗ Y1(X) → U
X + H → X
V + H ∗ Y1(X) → V
Next
U ◢
V ◢
```