Cours de Terminale S
Lycée Camille Pissarro 2013-2014

Sébastien Andrieux

7 juin 2014

Table des matières

Première partie

Cours de Terminale S

Chapitre 1

Raisonnement par récurrence

Propriété
On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier naturel n.
Soit n_0 un entier naturel.
Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité** : pour tout entier $k \geqslant n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie ;

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque

1. La propriété $P(n)$ peut être une égalité, une inégalité, une propriété exprimée par une phrase, etc.
2. La condition d'hérédité est une implication : on montre, pour un entier $k \geqslant n_0$, que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
   Une propriété $P(n)$ qui vérifie cette deuxième condition est dite héréditaire.

Remarque (Explication)
Si on a $P(0)$ vraie, et pour tout $k \geqslant 0$ $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$, alors :
- $P(0)$ est vraie et $(P(0) \Rightarrow P(1))$ donc $P(1)$ est vraie.
- $P(1)$ est vraie et $(P(1) \Rightarrow P(2))$ donc $P(2)$ est vraie.
- En poursuivant "de proche en proche" ce raisonnement, on a $P(n)$ vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

On peut faire l'analogie avec les dominos :
si l'on renverse le premier domino, et que chaque domino, en tombant, renverse le suivant, alors tous les dominos tombent.

Exemple :
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.
Solution
On raisonne par récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on va montrer la propriété $P(n)$: "$4^n - 1$ est divisible par 3".
- Initialisation : $P(0)$ est vérifiée, car $4^0 - 1 = 0$ est divisible par 3.
- Hérédité : Soit un entier $k \geqslant 0$:
  Supposons que la propriété $P(k)$: "$4^k - 1$ est divisible par 3" est vraie.
  Montrons $P(k+1)$: "$4^{k+1} - 1$ est divisible par 3".

On a :

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= \underbrace{3 \times 4^k}_{\text{divisible par 3}} + \underbrace{4^k - 1}_{\substack{\text{divisible par 3} \\ \text{(hypothèse de récurrence)}}} \end{aligned}$$

Par somme de nombres divisibles par 3, $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3.

— Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
Par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 1

1. Montrer que la propriété $P(n)$: "$4^n + 1$ est divisible par 3" est héréditaire.
2. Peut-on en conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 2

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $2^n > 2n$.

Exercice 3

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Valider cette conjecture en raisonnant par récurrence.

Exercice 4

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5

Soit u la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 6

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $4^n \geqslant 4n + 1$.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$.

Chapitre 2

Suites et limites des suites

I Suite convergente, suite divergente

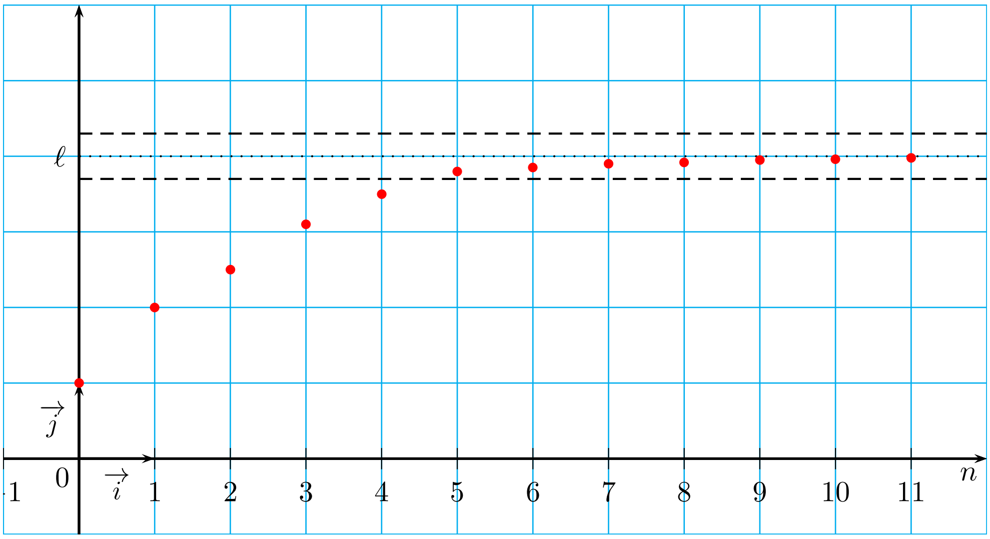
I.1 Suite ayant pour limite un réel ℓ

Définition
Soient (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = \ell$.
Formulation symbolique :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Remarque
L'écriture $|u_n - \ell| < \varepsilon$ signifie que l'écart entre u_n et ℓ est strictement inférieur à ε.
Autrement dit,

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| < \varepsilon &\Leftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\\ &\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \end{aligned}$$

Illustration :
Le graphique ci-dessous représente une suite (u_n) qui converge vers $\ell = 4$.
En prenant $\varepsilon = 0.3 > 0$, on constate que l'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est vérifiée à partir du rang $N = 5$.



Remarque
Il est inutile de préciser $n \to +\infty$ car c'est toujours le cas dans ce chapitre.
On note simplement $\lim u_n = \ell$ pour désigner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

> **Propriété (limites usuelles)**
> Les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ où k est un entier supérieur où égal à 1 convergent vers 0.

Démonstration
On montre que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0. Soit $a > 0$, on considère l'intervalle ouvert centré en 0 $I =]-a; a[$.
Pour tout $n > \dfrac{1}{a}$, on a $0 < \dfrac{1}{n} < a$, et donc $\dfrac{1}{n}$ appartient à I.
L'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Donc $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. □

Remarque
1. Une suite constante converge vers la valeur de la constante.
2. Il existe des suites qui ne sont pas convergentes (on dit alors divergentes).
   Exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.
   Les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ n'ont pas de limite. Elles sont divergentes.

> **Théorème**
> Si une suite est convergente, sa limite est unique.

I.2 Suites ayant une limite infinie

> **Définition**
> On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
> On note alors $\lim u_n = +\infty$.
> On a un énoncé analogue pour un suite qui diverge vers $-\infty$.

Propriété
Les suites (n^2), $(\sqrt{n})$, (n^k) où k est un entier supérieur où égal à 1 divergent vers $+\infty$.

I.3 Lien avec les limites de fonctions

Théorème (suite définie par son terme général)
Soit (u_n) une suite définie par son terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[M; +\infty[$.

1. si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim u_n = \ell$.
2. si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
3. si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

On peut donc utiliser les limites en $+\infty$ de fonctions de référence pour déterminer les limites de suites usuelles.

I.4 Algorithme de recherche de seuil

Recherche de seuil dans le cas d'une suite qui diverge vers $+\infty$

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.
Il est clair que $\lim u_n = +\infty$.
On cherche le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $n^2 \geqslant 10^7$.

— Méthode 1 : on résout l'inéquation $n^2 \geqslant 10^7$
Comme n est un entier positif, cela implique $n \geqslant \sqrt{10^7} \approx 3162,3$.
Le plus petit entier qui convient est donc $N = 3163$.
Parfois, on sera confronté à des inéquations qu'on ne sait pas résoudre, et il faudra se tourner vers la méhode 2.

— Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme.

```
DÉBUT
  n prend la valeur 0
  U prend la valeur n^2
  Tant que U < 10^7,
    n prend la valeur n + 1
    U prend la valeur n^2
  Fin Tant que
  Afficher n
FIN
```

Le programme renvoie 3163.

Exercice 8
Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \times \sqrt{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. On admet que $\lim u_n = +\infty$.
   Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^4$ (voir livre page 14).
3. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0 [1].

Exercice 9
Un verre d'eau contient 50 bactéries à l'heure $n = 0$. On admet que le nombre de bactéries triple toutes les heures.
On note (u_n) le nombre de bactéries au bout de n heures (ainsi, $u_0 = 50$).

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Déterminer le nombre de bactéries au bout de 10 heures à l'aide de la calculatrice.
4. Utiliser un algorithme pour déterminer le nombre d'heures à partir duquel il y a plus d'un billion (10^{12}, soit 1000 milliards) de bactéries.

Cas d'une suite convergeant vers un réel ℓ

Exercice 10
Soit (a_n) la suite définie par son premier terme $a_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 3.$$

1. Calculer à la main a_1, a_2 et a_3. Rédiger les calculs.
2. Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée de a_{10}, a_{20}, et a_{30}. On arrondira à 0,0001 près.
3. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (a_n) ?
4. Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|a_{n_0} - 9| < 0,0001$.
5. Programmer cet algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.

II Opérations sur les limites

Tous les résultats suivants sont admis. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes ou divergeant vers l'infini. ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

II.1 Limite d'une somme

Si $\lim u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim(u_n + v_n) =$						

Exemple :
$\lim\limits_{+\infty} 2n + \dfrac{1}{n}$

1. On doit trouver $n_0 = 465$

II.2 Limite d'un produit

Si $\lim u_n =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $\lim v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors, $\lim(u_n \times v_n) =$									

Exemple :
$\lim\limits_{+\infty} 3n^2\sqrt{n}$

II.3 Limite d'un quotient

cas où la limite de (v_n) n'est pas nulle

Si $\lim u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si $\lim v_n =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim \frac{u_n}{v_n} =$							

cas où la limite de (v_n) est nulle

Si $\lim u_n =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim v_n =$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\lim \frac{u_n}{v_n} =$					

Exemple :
$\lim\limits_{-\infty} \frac{4n}{3n^2\sqrt{n}}$

Remarque (Récapitulatif des formes indéterminées)

1. $+\infty - \infty$,
2. $\pm\infty \times 0$,
3. $\frac{0}{0}$,
4. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Indication pour lever les indéterminations
Transformer l'écriture, développer ou factoriser.
Mettre en facteur les plus grandes puissances de n possibles au numérateur et au dénominateur.
et au dénominateur.

III Théorèmes de comparaison

Théorème (théorèmes de comparaison)

1. Théorème des gendarmes.
   Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
   Si,
   — à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
   — et $\lim u_n = \ell$, et $\lim w_n = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$,
   alors (v_n) converge vers ℓ.
2. Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, avec $\lim v_n = 0$, alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration
Théorème des gendarmes.
Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$, alors à partir d'un certain ranq q, tous les termes de la suite (v_n) sont dans I.
De même, à partir d'un certain rang q', tous les termes de la suite (u_n) sont dans I.
Posons alors $r = \max(p, q, q')$.
Pour tout $n \geqslant r$, on a

$$a < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < b.$$

Donc, à partir de ce rang r, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent I.
Par définition, la suite (u_n) converge vers ℓ. $\lim u_n = \ell$. $\square$

Exemple :

Étudier la convergence des suites : $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.

$v_n = \dfrac{3 + 5 \times (-1)^n}{n^2}$.

Théorème (comparaison)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

1. Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
2. Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$

Remarque
Ces propriétés sont particulièrement utiles lorsqu'on rencontre des cosinus, sinus ou des $(-1)^n$.

Démonstration (à connaître)

1. On suppose qu'il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \leqslant v_n$.
   Soit $A > 0$.
   Comme $\lim u_n = +\infty$, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $u_n \geqslant A$.
   Posons $N = max(n_1; n_2)$.
   Pour tout $n \geqslant N$, on a $A \leqslant u_n \leqslant v_n$, et donc $v_n \geqslant A$.
   On a montré que pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \geqslant A$.
   Donc $\lim v_n = +\infty$.
2. Il suffit d'adapter la démonstration du 1. $\square$

Exemple : étudier la convergence des suites
$u_n = 2n + 3\sin(n)$.
$v_n = 2 \times (-1)^n - 4n$.

IV Suite de terme général q^n (q réel)

Propriété (inégalité de Bernoulli)
Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Démonstration
Soit $x > 0$.
On raisonne par récurrence sur n.
Initialisation
Pour $n = 0$, on a $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$.
Donc $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$.
L'inégalité est vraie pour $n = 0$.
Hérédité
Soit $k \geqslant 0$.
Supposons que $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$. Montrons l'inégalité au rang $(k+1)$.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \times (1+x) \geqslant (1+kx)(1+x).$$

En effet, le sens de l'inégalité est conservé en multipliant par $(1+x) > 0$.
Or, $(1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x$ (car $kx^2 \geqslant 0$).
On a donc $(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x$.
La propriété est héréditaire.
Conclusion
On a montré par récurrence que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. □

IV.1 Étude de la suite (q^n)

Distinguons plusieurs cas :

- Si $q = 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, $0^n = 0$, donc (0^n) tend vers 0.
- Si $q = 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, $1^n = 1$, donc (1^n) tend vers 1.
- Si $q > 1$. D'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geqslant 1 + n(q-1)$.
  Comme $q - 1 > 0$, on a clairement $\lim 1 + n(q-1) = +\infty$, et par comparaison, $\lim q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, (et $q \neq 0$), alors $\dfrac{1}{|q|} > 1$, donc $\lim \dfrac{1}{|q|^n} = +\infty$. D'après les résultats sur les opérations, il vient $\lim |q|^n = 0$.
  Ayant l'inégalité -$|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$, on conclut via le théorème des gendarmes que $\lim q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) prend alternativement ses valeurs dans $[1; +\infty[$ et dans $]-\infty; -1]$. Elle diverge donc et n'a pas de limite.

Théorème
Si $q > 1$, alors $\lim q^n = +\infty$.
Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale 1 (et converge donc vers 1).
Si $-1 < q < 1$, alors $\lim q^n = 0$.
Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

Démonstration (à connaître)
Il faut savoir redémontrer que lorsque $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$.
Cela inclut l'inégalité de Bernoulli (que l'on peut montrer par récurrence). □

IV.2 Application

Ce résultat permet de calculer la limite éventuelle de la somme des termes d'une suite géométrique.
Soit x un nombre réel tel que $-1 < x < 1$.
Considérons la somme $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.
On sait que $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
Comme $\lim x^n = 0$ (car $-1 < x < 1$), on obtient $\lim S_n = \dfrac{1}{1 - x}$.

Propriété
Soit x un réel vérifiant $-1 < x < 1$. Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

V Suites majorée, minorée, bornée

Propriété
Si une suite est croissante et converge vers un réel ℓ, alors elle est majorée par ℓ.

Démonstration
On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$).
On raisonne par l'absurde.
Si (u_n) n'est pas majorée par ℓ, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > \ell$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p \quad (*)$.
Or, par définition d'une suite convergeant vers ℓ, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
En particulier, l'intervalle $]\ell - 1; u_p[$ doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Ceci est en contradiction avec $(*)$.
Donc l'hypothèse de départ – (u_n) n'est pas majorée par ℓ – est fausse.
Conclusion : (u_n) est majorée par ℓ. □

Théorème
Toute suite croissante majorée converge.
Toute suite décroissante minorée converge.

Remarque
Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge sans avoir à chercher sa limite.
Attention, en pratique, si (u_n) est croissante et si pour tout entier n, $u_n < A$, on en déduit que $\ell \leqslant A$ (mais surtout pas $\ell < A$).

Exemple :
Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
On peut en déduire que (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
Dans ce cas simple, on peut calculer la limite, et $\lim u_n = 0$.

Théorème
Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration
Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit $A > 0$.
Comme (u_n) n'est pas mojorée, il existe un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$, et donc $u_n > A$.
Par définition, $\lim u_n = +\infty$. □

Remarque
1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
3. Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Remarque
Il existe des suites qui divergent vers $+\infty$ et qui ne sont pas croissantes.
Exemple : $u_n = n + 4\sin(n)$.

Exercice 11
On va démontrer l'exemple de cette remarque. Soit $u_n = n + 4\sin n$.
1. Montrer que $\lim u_n = +\infty$.
2. Montrer que (u_n) n'est pas croissante.

Application 1 : (retour sur les suites géométriques)
Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$.
1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et trouver sa limite.

Application 2 : (suite définie par récurrence)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.

1. Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ et montrer que $f([1;4]) \subset [1;4]$.

2. Montrer que (u_n) est croissante majorée par 4.
3. Que peut-on en déduire ?
4. Notons $\ell = \lim u_n$. On admet que ℓ est un point fixe de f (c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$). Déterminer la valeur de ℓ.

Chapitre 3

Probabilités conditionnelles

I Probabilité conditionnelle

Définition
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$, est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On note parfois aussi $P(B/A)$.

Les probabilités conditionnelles vérifient les propriétés des probabilités. En particulier,

Propriété
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

1. $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.
2. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
3. S'il y a équiprobabilité sur Ω, $P_A(B) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A} \cap \text{B}}{\text{nombre d'éléments de } A}$.

Remarque
Lorsqu'on calcule $P_A(B)$, l'ensemble de référence devient A.

Exemple :
Dans une classe de terminale de 32 élèves répartis en 18 filles et 14 garçons, il y a 20 élèves en spécialité LV2 Espagnol, dont 8 filles.
On choisit la fiche d'un élève au hasard, chaque fiche a autant de chance d'être choisie.
On note :
A : « L'élève est une fille ».
B : « L'élève suit la spécialité LV2 Espagnol ».

1. Calculer $P_A(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.

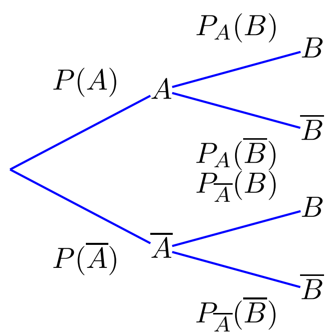
Propriété
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
Alors, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

II Arbre de probabilité

Certaines situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles peuvent être représentées par des arbres pondérés.
On place les événements aux bouts des branches, et les probabilités sur les branches. Un chemin est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

Exemple :

1$^{\text{er}}$ niveau 2$^{\text{ème}}$ niveau



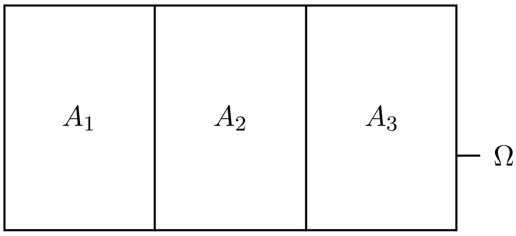
Événement (chemin)	Probabilité
$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$A \cap \overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$
$\overline{A} \cap B$	$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$
$\overline{A} \cap \overline{B}$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

Propriété
1. La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1.
2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur les branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

III Formule des probabilités totales

Définition
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de probabilités non nulles d'un univers Ω.
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω lorsque :
1. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,
2. et les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i \neq j$).

Exemple :



A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers Ω.

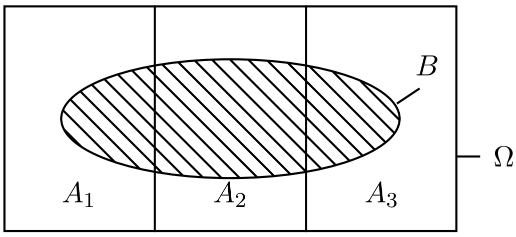
Remarque

Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Propriété (probabilités totales)

Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω.
Alors, pour tout événement B,

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ & = & P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{array}$$



Remarque

Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
dans ce cas, la formule des probabilité totales s'écrit : Pour tout événement B,

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ & = & P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \end{array}$$

IV Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).
On dit que A et B sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Remarque

1. Lorsque $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, on dit que A et B sont indépendants.
2. Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur la probabilité de l'autre : $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Conséquence

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque
Ne pas confondre événements incompatibles et indépendants :

- A et B incompatibles : $A \cap B = \varnothing$ (A et B ne peuvent pas être réalisés ensemble) d'où $P(A \cap B) = 0$.
- A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, (non nul si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

Exemples : lancer successivement des pièces, des dés, répéter le tirage d'un bille dans une urne qui contient toujours le même nombre de billes (tirages avec remise) sont des expériences indépendantes.

Propriété
Si les événements A et B sont indépendants, alors :

1. $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
2. A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration (à connaître)
On va montrer que (A et B indépendants) $\Rightarrow$ ($\overline{A}$ et B indépendants).
Supposons que A et B soient indépendants.
On peut se limiter au cas où $P(B) \neq 0$ (si $P(B) = 0$, le résultat est évident), de sorte que $P_B(A)$ et $P_B(\overline{A})$ soient bien définies.
On va montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, soit $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
On a toujours $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

$$\begin{aligned} P_B(\overline{A}) &= 1 - P_B(A) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(\overline{A}) \end{aligned}$$

En effet, comme A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$.
Donc $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants. □

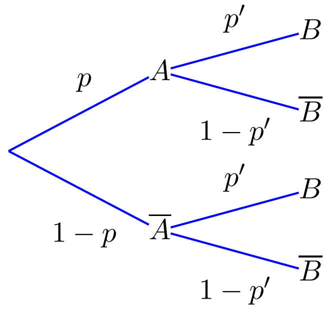
Remarque
Dans le cas de deux événements A et B de probabilités non nulles, l'indépendance peut se lire sur un tableau d'effectifs ou un arbre de probabilités :

1. Tableau d'effectifs :
   Lorsque A et B sont indépendants, le tableau d'effectifs (hors totaux) est un tableau de proportionnalité.

	A	$\overline{A}$	Total
B	1	2	3
$\overline{B}$	3	6	9
Total	4	8	12

   $P(B) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
   $P_A(B) = \dfrac{1}{4}$. Donc $P(B) = P_A(B)$.
   A et B sont indépendants.

2. Arbre de probabilité : A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.
   Autrement dit, on retrouve les mêmes probabilités conduisant à B sur le 2[e] niveau de branche, que l'on parte de A ou de $\overline{A}$.



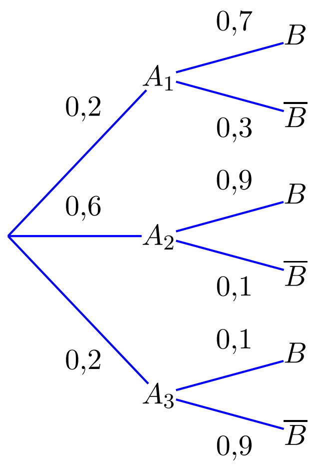
Exercice 12
On se propose de démontrer le résultat énoncé dans la remarque précédente :
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } P_A(B) = P_{\overline{A}}(B).$$

1. Implication directe.
   On suppose que A et B sont indépendants. Montrer que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.
2. Réciproque.
   On suppose que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$. Montrer que A et B sont indépendants.

V Exercices

Exercice 13
On donne l'arbre pondéré suivant.

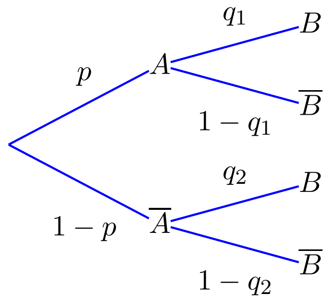


1. Montrer que A_1 et B sont indépendants.
2. Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements A_3 et B sont-ils indépendants ?

Exercice 14
On se propose de démontrer le résultat énoncé dans la remarque précédente :
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } P_A(B) = P_{\overline{A}}(B).$$

1. Implication directe.
   On suppose que A et B sont indépendants. Montrer que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.



2. Réciproque.
   On suppose que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$. Montrer que A et B sont indépendants.

Chapitre 4

Limites de fonctions. Comportement asymptotique.

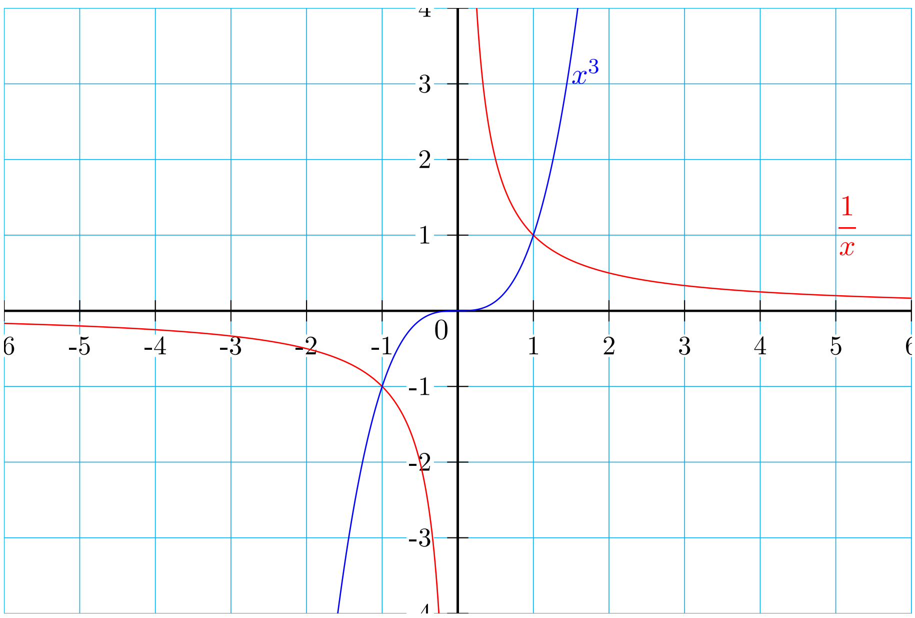
I Limites à l'infini

I.1 Premiers exemples

On s'intéresse au comportement des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x^3$ lorsque x devient très grand ou très petit.

Tableau de valeurs :

x	-10^6	-10^4	-10^2	-10	10	10^2	10^4	10^6
$\dfrac{1}{x}$	-10^{-6}	-10^{-4}	-0.01	-0.1	0.1	0.01	10^{-4}	10^{-6}
x^3	-10^{18}	-10^{12}	-10^6	-1000	1000	10^6	10^{12}	10^{18}



On remarque que lorsque x devient très grand, les valeurs de $\dfrac{1}{x}$ deviennent très proches de 0. On dit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet 0 pour limite en $+\infty$ (ou tend vers 0 en $+\infty$).

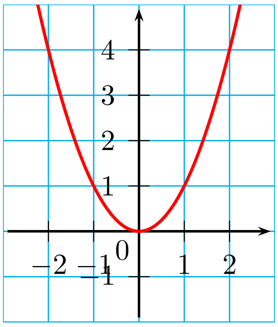
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
De même, lorsque x est très grand, les valeurs de x^3 deviennent très grandes, on dit que la fonction cube admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, on a :
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

Définition
Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (sur un intervalle $[a; +\infty[$), et ℓ un nombre réel.

1. On dit que la limite de f en $+\infty$ est ℓ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty; B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.

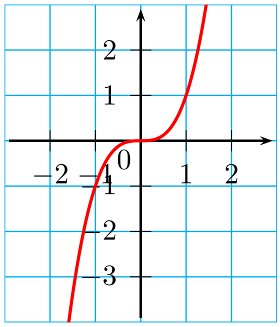
I.2 Limites à l'infini de fonctions usuelles

fonction carré



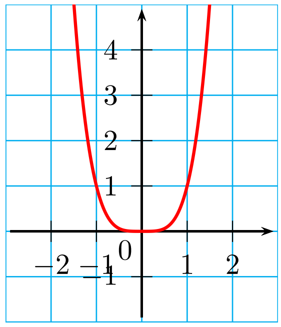
$f(x) = x^2$

fonction cube



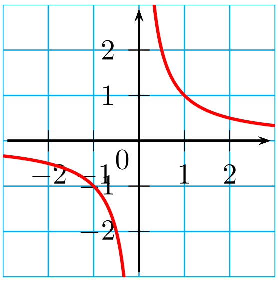
$f(x) = x^3$

puissance quatrième



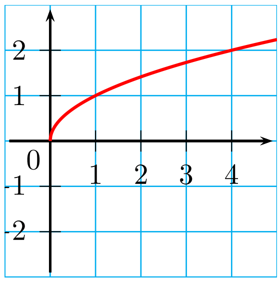
$f(x) = x^4$

fonction inverse



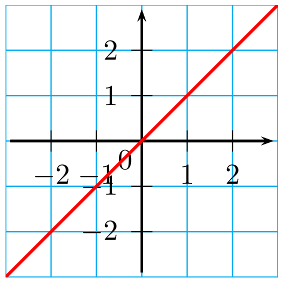
$f(x) = \dfrac{1}{x}$

fonction racine carrée

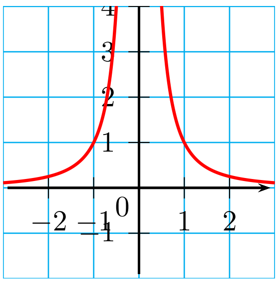


$f(x) = \sqrt{x}$

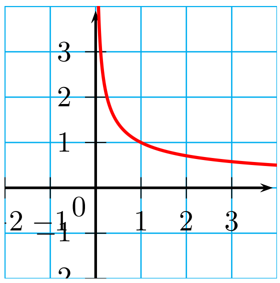
fonction identité



$f(x) = x$

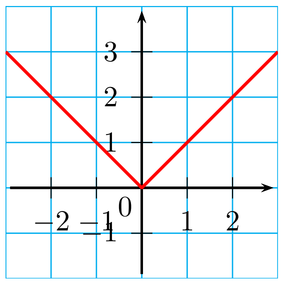


$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

valeur absolue



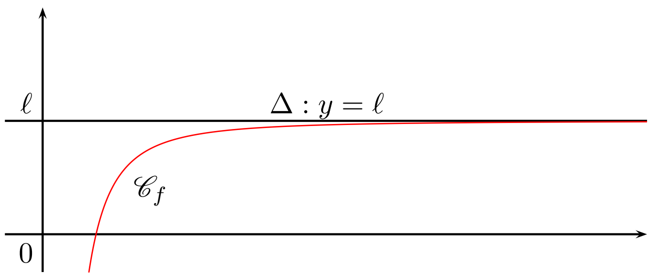
$f(x) = |x|$

$f(x)$	D_f	limite en $-\infty$	limite en $+\infty$
x	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
x^2	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
x^n, $n \geqslant 1$	$\mathbb{R}$	$+\infty$ si n est pair $-\infty$ si n est impair	$+\infty$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	pas de sens	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$\dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	pas de sens	0

Remarque
Certaines fonctions n'ont pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. C'est par exemple le cas de cos et sin qui oscillent sans cesse entre -1 et 1 sans tendre vers une limite réelle.

I.3 Asymptote horizontale

Dans le cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, ℓ tant un nombre réel, il semble que la courbe de f devienne infiniment proche de la droite horizontale Δ qui a pour équation $y = \ell$.



Définition
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $(\ell \in \mathbb{R})$ on dit que la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
De même, si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

II Limite infinie en a (a réel)

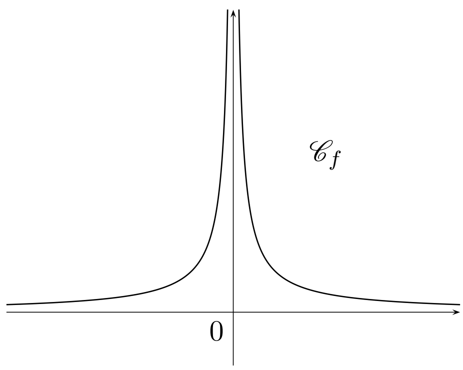
Cadre : Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction qui est définie au voisinage de a mais pas en a. On se propose de chercher les limites éventuelles de f lorsque x tend vers a.

II.1 Deux exemples de base

Premier exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **et** $a = 0$**.**

Tableau de valeurs :

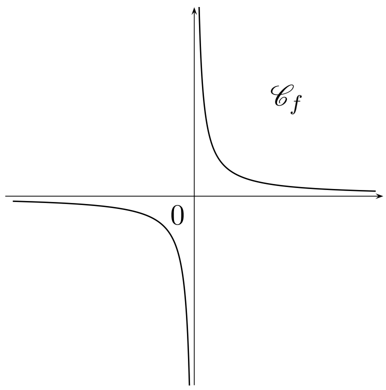
x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
$f(x)$	1	100	10000	10^6	non def	10^6	10000	100	1



Il est clair que lorsque x prend des valeurs proches de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment grandes.
Nous dirons donc que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
Notation : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On observe que lorsque x tend vers 0, la courbe de f devient infiniment proche de l'axe des ordonnées (Oy).
Nous dirons que (Oy) est asymptote $\mathscr{C}_f$ en 0.

Deuxième exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **et** $a = 0$**.**



1. Si $x > 0$: lorsque x prend des valeurs proches de 0 en étant à droite de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment grandes.
   Nous dirons donc que f admet $+\infty$ comme limite à droite lorsque x tend vers 0.
   Notation : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

2. Si $x < 0$: lorsque x prend des valeurs proches de 0 en étant à gauche de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment petites.

De même, nous dirons que f admet $-\infty$ comme limite à gauche lorsque x tend vers 0.
Notation : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

Là encore, lorsque x tend vers 0, la courbe de f devient infiniment proche de l'axe des ordonnées (Oy) : (Oy) est asymptote $\mathscr{C}_f$ en 0.

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a-r; a[$ ou $]a; a+r]$, avec $r > 0$.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty; B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

II.2 Quelques limites en 0

Théorème

1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec n pair ont $+\infty$ pour limite en 0.
2. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec n impair ont $+\infty$ pour limite à droite en 0, et $-\infty$ pour limite à gauche en 0.

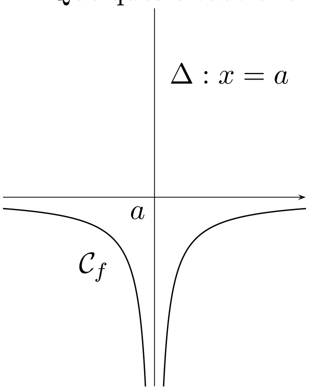
Remarque
Si la limite d'une fonction en a existe, alors elle est unique.
En particulier, si f admet deux limites différentes à droite et à gauche en a, on considère que f n'a pas de limite en a.
Par exemple, la fonction inverse n'a pas de limite en 0 car $\lim\limits_{0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

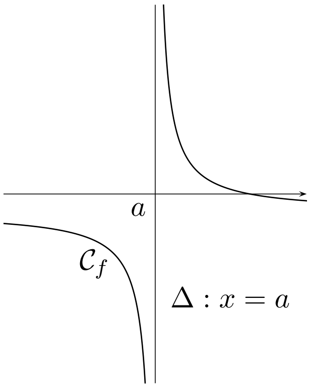
II.3 Asymptote verticale

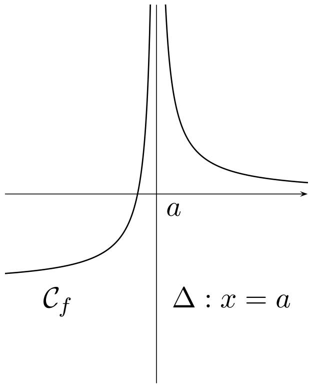
Définition
Dès que l'on est dans l'une des situations suivantes, on dit que la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en a :

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$,
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$,
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Quelques situations illustrées :







$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$

Remarque (sur les asymptotes)

1. Une valeur interdite pour la fonction donne très souvent une asymptote verticale pour sa courbe.
2. On étudie la position relative de la courbe et de son asymptote uniquement dans le cas des asymptotes horizontales ou obliques.

II.4 Exemple de calcul de limite à droite et à gauche d'un réel

La méthode est la suivante :

1. calculer la limite du numérateur,
2. dresser le tableau de signe du dénominateur,
3. en déduire la limite du dénominateur.
4. conclure avec les opérations (voir III).

Exemple : $f(x) = \dfrac{x-5}{3-x}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ mais n'est pas définie en 3.

On peut chercher ses limites à droite et à gauche de 3.

Au numérateur, $\lim\limits_{x \to 3} x - 5 = 3 - 5 = -2 < 0$.

Le tableau de signe de $3 - x$ est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \to 3-} 3 - x = 0+$

On en déduit, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to 3+} 3 - x = 0-$

De même, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$.

On peut en déduire que la courbe de f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$.

III Limites et opérations

Tous les résultats suivants sont admis.
f et g sont des fonctions qui admettent une limite en a, (a désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$). ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

III.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite en a						

Exemple :
$\lim\limits_{+\infty} 2x + \dfrac{1}{x}$

III.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite en a	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite en a									

Exemple :
$\lim\limits_{+\infty} 3x^2\sqrt{x}$

III.3 Limite d'un quotient

cas où la limite de g n'est pas nulle

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite en a	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a							

cas où la limite de g est nulle

Si f a pour limite en a	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite en a	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a					

Exemple :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4}{3x^2}$

Remarque (Récapitulatif des formes indéterminées)
Les 4 formes indéterminées sont donc : $+\infty - \infty$, $\pm\infty \times 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, et $\dfrac{0}{0}$.
Dans tous les autres cas, on peut conclure directement avec les opérations.

III.4 Quelques indications pour lever les indéterminations

1. Forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$:
   Reconnaître la définition du nombre dérivé d'une fonction.
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.
2. Transformer l'écriture : développer ou factoriser.
   Lorsque x tend vers l'infini, mettre en facteur les plus grandes puissances de x possibles au numérateur et au dénominateur.
3. Il existe un théorème sur les polynômes et fractions rationnelles qui s'applique lorsque $x \to \pm\infty$ (voir ci-dessous).

IV Théorèmes sur les limites de fonctions

IV.1 Limites à l'infini des polynômes et fractions rationnelles

Théorème (Polynômes et fractions rationnelles)
1. Un polynôme a la même limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) que son terme de plus haut degré.
2. Une fraction rationnelle a la même limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) que le quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.

Exemples :

1. $P(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 1$.
   Alors $\lim\limits_{-\infty} P = \lim\limits_{-\infty} 3x^5 = -\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{-2x^3 + x^2 + 4x - 5}{5x^4 + 3x^3 + 2}$.
   Alors $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-2x^3}{5x^4} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-2}{5x} = 0$.

IV.2 Limite par comparaison

Dans cette partie, a, b et ℓ peuvent désigner des nombres réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème

1. **Théorème des « gendarmes »**
   Si, pour x assez voisin de a, on a l'encadrement $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, et si u et v ont la même limite ℓ en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. **Cas d'une limite infinie**
   Si, pour x assez voisin de a, on a l'inégalité $u(x) \leqslant f(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
   (Énoncé analogue avec $f(x) \leqslant v(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$)

Exemple : Étudier le comportement de $x \mapsto x - 2\sin x$ en $+\infty$.
Comme $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $2 \geqslant -2\sin x \geqslant -2$,
et donc $f(x) \geqslant x - 2$.
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$.
Par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

IV.3 Limite d'une fonction composée

Définition
Soient $f \; : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. La fonction $g \circ f$ est alors définie sur I par :

$$\text{pour tout } x \in I,\ (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Pour que $g \circ f$ soit bien définie, il faut que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

Remarque
Dans $g \circ f$, l'ordre des fonctions a son importance .
Exemple : $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 3$.
Déterminer les expressions de $g \circ f$ et de $f \circ g$. Comparer.

Théorème (limite d'une fonction composée)
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

Exemple : Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $g(x) = \sqrt{2 + \dfrac{3}{x}}$.

(Réponses : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g = \sqrt{2}$)

V Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

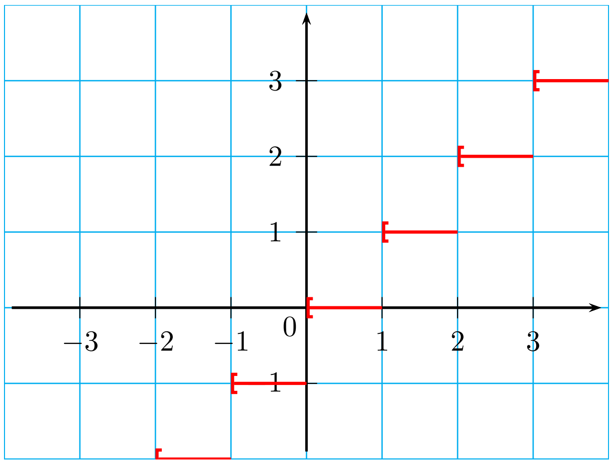
V.1 Continuité

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

Remarque
On peut tracer la courbe d'une fonction continue sans lever le crayon, alors que c'est impossible avec une fonction discontinue.

Exemple :
La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $E(x)$.
Par exemple,
$E(27,3) =$ $E(\pi) =$ $E(6) =$ $E(-5,1) =$
La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle est discontinue en tout nombre entier a).

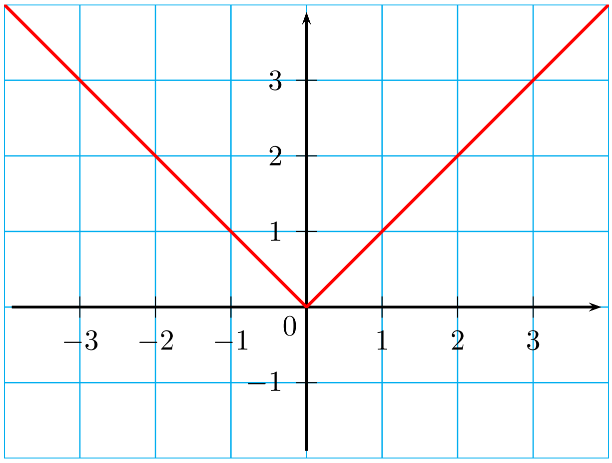


Exercice 15
Montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en 2.
$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} E(x) =$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) =$
Donc . . . .
. . . .

Propriété (admise)
Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Corollaire
Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions fractions rationnelles (quotient de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque
La réciproque de la propriété précédente est fausse :
il existe des fonctions qui sont continues en a et qui ne sont pas dérivables en a.
Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en 0), mais elle n'est pas dérivable en 0.



Exercice 16
En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

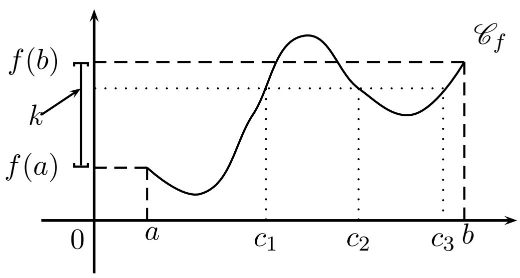
La fonction valeur absolue est définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Théorème (opérations sur les fonctions continues)
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I.

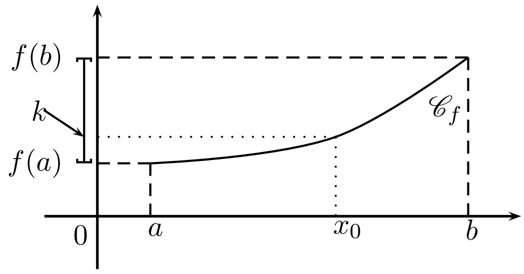
1. Les fonctions $(u+v)$, $(u \times v)$ et u^n $(n \geqslant 1)$ sont continues sur I.
2. Les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies (lorsque $v(x) \neq 0$).
3. La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

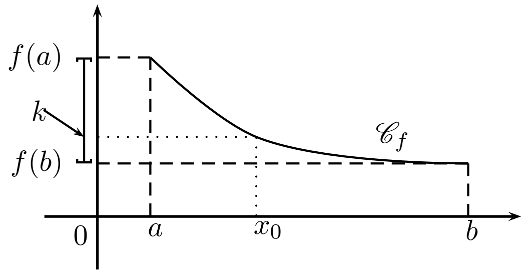
V.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (des valeurs intermédiaires : TVI)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.



Corollaire
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$.
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans $[a;b]$.





Remarque

1. En particulier, si f et dérivable et $f' > 0$ sur $[a;b]$, alors f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$ et les hypothèses du corollaire sont vérifiées.
   De même les hypothèses du corollaire sont vérifiées si $f' < 0$ sur $[a;b]$.
2. On utilise souvent ce corollaire avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires.
   Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a;b]$.

Exemple détaillé :
On cherche à étudier l'équation $x^3 + 3x - 7 = 0$ sur $[1;2]$.
Notons $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$.
   On en déduit que f est strictement croissante sur $[1;2]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.
   On remarque que $f(1) = -3$ et $f(2) = 7$.
   D'après le théorème précédent, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1;2]$.
3. Utiliser le tableur de la calculatrice pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
   Après quelques manipulations, on obtient sur la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

x	$f(x)$
1.405	-0.0115
1.406	-0.0026
1.407	0.00637
1.408	0.01531

On en déduit que $1.406 < \alpha < 1.407$.

Remarque
On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire au cas où f est continue sur un intervalle I non borné $[A;+\infty[$, $]-\infty;A]$, ou $]-\infty;+\infty[$.

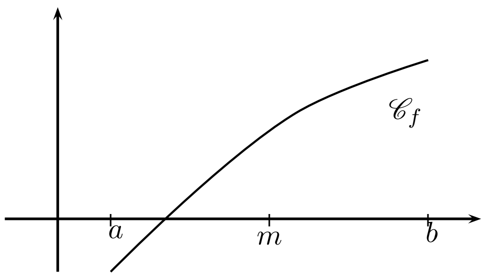
V.3 Algorithme de dichotomie (voir page 53)

On se place dans le cas où l'on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :
la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires (ce qui s'écrit $f(a) \times f(b) < 0$).
Alors, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[a;b]$.

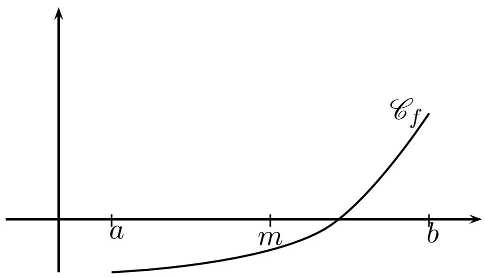
Pour approcher cette solution α, l'algorithme de dichotomie consiste à découper l'intervalle $[a;b]$ en 2 autant de fois qu'il le faut pour atteindre la précision souhaitée.

À chaque étape, on calcule le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$, centre de l'intervalle $[a;b]$.
Si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$, alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires.
On en déduit donc que $\alpha \in [a;m]$.
On recommence alors le procédé avec l'intervalle $[a;m]$.
Sinon, $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, donc $\alpha \in [m;b]$.
On recommence avec l'intervalle $[m;b]$.

Illustration avec f strictement croissante sur $[a;b]$:



$f(a) \times f(m) \leqslant 0$.
Alors $\alpha \in [a;m]$



$f(a) \times f(m) > 0$.
Alors $\alpha \in [m;b]$.

Algorithme renvoyant les bornes a et b d'un intervalle $[a;b]$ ayant une amplitude inférieure à e et contenant α.

```
Saisir a, b, e
Tant que b − a ⩾ e
     m prend la valeur (a+b)/2
      Si f(a) × f(m) ⩽ 0
           Alors b prend la valeur m
           Sinon a prend la valeur m
      Fin Si
Fin Tant que
```

`Afficher` a `et` b.

Algorithme TI (en entrant la fonction f dans Y_1).

```
: Prompt A,B,E
: While B-A⩾ E
: (A+B)/2→ M
: If Y₁(A)*Y₁(M)⩽0
: Then
: M → B
: Else
: M → A
: End
: End
: Disp A,B
```

Attention, on trouve Y_1 dans $\boxed{\text{var}}$, puis $\boxed{\text{VAR-Y=}}$.
Ne pas taper $Y1$.

Algorithme Casio (en entrant la fonction f dans Y_1).

```
? → A
? → B
? → E
While B-A⩾ E
(A+B)/2 → M
A → X
Y1 → F
M → X
Y1 → G
If F×G⩽0
Then M → B
Else M → A
IfEnd
WhileEnd
A ◢
B ◢
```

Remarque
Pour approcher la solution de l'équation $f(x) = k$, on utilise la fonction g définie par $g(x) = f(x) - k$ à la place de la fonction f.
En effet, $f(x) = k$ équivaut à $g(x) = 0$.

Exemple :
Exercice 120 page 62.
On montre que l'équation $x^3 - 2x^2 + x = 1$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
On rentre $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ dans Y_1.
Pour une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut, on cherche un encadrement d'amplitude inférieure à 0,01.
On entre donc dans l'algorithme $a = 1$, $b = 2$, et $e = 0,01$.
Il renvoie $a = 1,75$, et $b = 1,7578125$.
Donc $1,75 < \alpha < 1,76$.
Par défaut à 0,01 près, $\alpha \approx 1,75$.
Attention, il faut parfois entrer une valeur de e inférieure à l'amplitude de l'encadrement souhaité :
Pour un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}, si l'on lance l'algorithme avec $e = 0,001$, on obtient :
$a = 1,75390625$ et $b = 1,754882813$.
Cela ne permet pas de conclure.
Avec $e = 0,0001$, $a = 1,754875183$ et $b = 1,754882813$.
Donc $1,754 < \alpha < 1,755$.

Chapitre 5

Compléments sur la dérivation

I Dérivées de $\sqrt{u}$ et u^n.

Théorème

1. Si u est une fonction dérivable sur I et si pour tout $x \in I$ $u(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$
2. Si u est une fonction dérivable sur I, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction u^n est dérivable sur I et
$$(u^n)' = n\, u^{n-1} \times u',$$

Démonstration

1. Soient $a \in I$, et h un réel tel que $a+h \in I$. Le taux d'accroissement de la fonction $\sqrt{u}$ entre a et $a+h$ est :
$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)})(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})}{h(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} \end{aligned}$$
Comme la fonction u est continue en a, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u(a)}}$.
Comme la fonction u est dérivable en a, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.
Par produit des limites,
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}.$$
Donc la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable en a et le nombre dérivé en a est $\dfrac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable en tout réel a de I elle est donc dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

2. On raisonne par récurrence.
   Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
   On veut montrer la propriété $P(n)$: Pour tout $n \geqslant 1$, u^n est dérivable et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
   Initialisation :
   Pour $n = 1$, $u^1 = u$ est dérivable sur I, et $(u^1)' = u'$. $1 \times u^{1-1}u' = u'$.
   Donc $P(1)$ est vraie.
   Hérédité :
   Soit $k \geqslant 1$. On suppose que la propriété $P(k)$ est vraie.
   Montrons que $P(k+1)$ est vraie.
   La fonction $u^{k+1} = u^k \times u$ est dérivable sur I par produit de fonctions dérivables (HR pour u^k).
   Par dérivation d'un produit et avec l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{rcl}(u^{k+1})' & = & (u^k \times u)' \\ & = & (u^k)' \times u + u^k \times u' \\ & = & ku^{k-1}u' \times u + u^k u' \\ & = & k \times u^k u' + u^k u' \\ & = & (k+1)u^k u'\end{array}$$

   Donc $P(k+1)$ est vraie.
   Par récurrence, on a donc montré que la fonction u^n est dérivable pour tout $n \geqslant 1$ et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$. □

Exercice 17
Dériver les fonctions suivantes :
$f(x) = (-2x+3)^5$.
$g(x) = \sqrt{3x-9}$.

Remarque
Si u est une fonction dérivable sur I et qui ne s'annule pas ($u(x) \neq 0$ sur I), alors formule $(u^n)' = n\ u^{n-1} \times u'$ est aussi vraie lorsque n est un entier négatif.

Tous ces résultats sont des cas particuliers d'une seule et unique propriété : la dérivée d'une fonction composée.

II Dérivée d'une fonction composée

Théorème (admis)
Soient $u : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

Remarque
La fonction f se note $g \circ u$ (prononcer "g rond u"). La formule précédente s'écrit :

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$$

Théorème
Soient $u : \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ une fonction affine, et v une fonction dérivable sur l'intervalle J. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = v(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

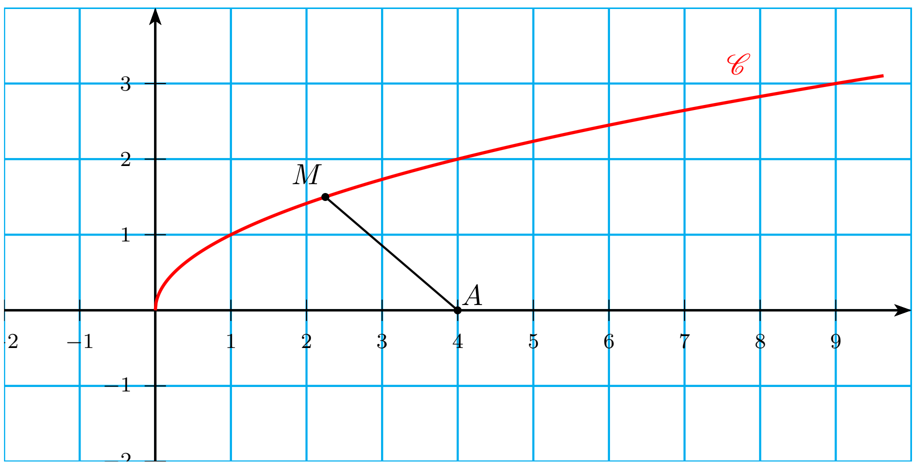
$$f'(x) = a \times v'(ax+b).$$

Remarque
Rappelons les formules de dérivées qui utilisent ce théorème :
Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Si u ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.
2. Si $u > 0$ sur I, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(u^n)' = nu^{n-1}v'$.
4. Si $f(x) = u(ax+b)$, alors $f'(x) = au'(ax+b)$.

III Exercice

Exercice 18 (distance d'un point à une courbe)
Soit f la fonction racine carrée, dont on considère la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.



On considère le point fixe $A(4;0)$, et le point mobile M appartenant à $\mathscr{C}$ et d'abscisse x. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $M(x;\sqrt{x})$.
L'objectif est de déterminer la valeur de x pour laquelle la distance AM est minimale.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, que peut-on conjecturer sur le minimum de la distance AM lorsque x décrit $[0;+\infty[$?
2. Soit $x \geqslant 0$. Exprimer la distance AM en fonction de x. On appelle d cette fonction qui à x associe la distance AM.
3. Étudier les variations de la fonction d, et démontrer la conjecture précédente.
4. Justifier qu'au point M_0 qui rend la distance AM minimale, la tangente à la courbe de la fonction f est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM_0}$.

Exercice 19

Soit ABC un triangle isocèle en A, de périmètre 20. On pose $BC = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.

1. Montrer que l'aire du triagle ABC est $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{100 - 10x}$, pour $0 \leqslant x \leqslant 10$.
2. (a) Étudier les variations de f sur $[0; 10]$.
   (b) Pour quelle valeur de f l'aire est-elle maximale ? Quelle est alors la nature du triangle ?
   (c) Déterminer x tel que l'aire du triangle soit 10.

Chapitre 6

La fonction exponentielle

I Définition

Propriété (admise)
Soient $u : \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ une fonction affine, et v une fonction dérivable sur l'intervalle J. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = v(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = a \times v'(ax+b).$$

Théorème
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration (unicité, à connaitre)
On admet qu'il existe une telle fonction. On montre l'unicité.

1. On montre qu'une telle fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
   Par produit (et composée), Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$.
   D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\Phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x)f'(-x)$$

   Or, $f' = f$, ce qui donne

   $$\begin{aligned} \Phi'(x) &= f(x) \times f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Comme $\Phi' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction Φ est constante.
   Or, $f(0) = 1$, donc $\Phi(0) = f(0)^2 = 1$.
   Φ est la fonction constante égale à 1.
   Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$.
   La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Démonstration de l'unicité de la fonction f.
   Considérons une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
   Alors g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (d'après 1.).

Par quotient de fonction dérivables, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)g(x)-g(x)f(x)}{[g(x)]^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $\frac{f}{g}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
Or, $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$.
Donc $\frac{f}{g}$ est la fonction constante égale à 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
Conclusion : il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. □

Définition
On appelle fonction exponentielle et on note exp l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Propriété
1. La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. $\exp(0) = 1$

Remarque
1. On rappelle que toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a montré au cours de la démonstration du théorème que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Propriété (relation fonctionnelle)
Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration
Soient a et b deux réels.
Posons $g(x) = f(a+b-x) \times f(x)$ où f est la fonction exponentielle.
La fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ a pour dérivée $x \mapsto -f'(a+b-x) = -f(a+b-x)$.
Par produit de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}g'(x) &= -f'(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f'(x) \\ &= -f(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
$g(0) = f(a+b)f(0) = f(a+b)$.
$g(b) = (a+b-b)f(b) = f(a) \times f(b)$.
Comme g est constante, $g(0) = g(b)$, soit $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
Conclusion : pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$. □

Propriété

1. La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) > 0$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

1. Première méthode :
   Par définition, la fonction exp est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, avec $\exp(0) = 1$.
   Or, on a vu que la fonction exp ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$ (voir la démonstration de l'unicité).
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
   Deuxième méthode :
   Soit $a \in \mathbb{R}$, $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$.

$$\begin{aligned}\exp(a) &= \exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)\\ &= \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right)\\ &= \left[\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

   Donc $\exp(a) \geqslant 0$.
   Or, on a vu que la fonction exp ne peut pas s'annuler (voir la démonstration de l'unicité du premier théorème, première partie).
   Donc $\exp(a) > 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

II Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété
Pour tous réels a et b,

1. $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. $\exp(-a) \times \exp(a) = \exp(-a+a) = \exp(0) = 1$.
   De plus, la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Donc $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.
2. On en déduit que $\exp(a-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
3. Démonstration par récurrence.
   Soit $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer la propriété $P(n)$: pour tout entier $n \geqslant 0$, $\exp(na) =$

$(\exp(a))^n$.

Initialisation

Pour $n = 0$, $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$, et $(\exp(a))^0 = 1$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie : $\exp(ka) = (\exp(a))^k$.

Montrons $P(k+1)$.

$$\begin{array}{rcl} \exp((k+1)a) & = & \exp(ka + a) \\ & = & \exp(ka) \times \exp(a) \\ & = & (\exp(a))^k \times \exp(a) \\ & = & (\exp(a))^{k+1} \end{array}$$

Donc La propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion

Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Soit maintenant n un entier négatif, alors $-n > 0$, et donc

$$\begin{array}{rcl} \exp(na) & = & \dfrac{1}{\exp(-na)} \\ & = & \dfrac{1}{(\exp(a))^{-n}} \\ & = & (\exp(a))^n \end{array}$$

Donc pour tout entier relatif n ($n \in \mathbb{Z}$), $\exp(na) = (\exp(a))^n$. $\square$

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle se note e, c'est-à-dire $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarque

$\mathrm{e} \approx 2.71828$.

Remarque

D'après la propriété ci-dessus, pour tout entier n,

$$\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = \mathrm{e}^n$$

On généralise cette écriture à tout réel x.

Définition (Notation)

Pour tout x réel, on note e^x l'image de x par la fonction exponentielle : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Avec la nouvelle notation, les propriétés déjà vues s'écrivent

Propriété

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est elle-même.
2. $e^0 = 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
4. Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :
   (a) $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
   (b) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
   (c) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
   (d) $(e^a)^n = e^{na}$.

Théorème (équation et inéquation)

Pour tous réels a et b,

1. $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
2. $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Démonstration

1. Si $a = b$, alors $e^a = e^b$.
   Réciproquement, si $e^a = e^b$, alors $\dfrac{e^a}{e^b} = 1$, soit $e^{a-b} = 1$.
   Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $e^0 = 1$.
   Donc $a - b = 0$.
   En effet, si on avait $a - b < 0$, on aurait $e^{a-b} < e^0$, ce qui n'est pas.
   De même, si on avait $a - b > 0$, on aurait $e^{a-b} > e^0$, ce qui n'est pas.
   Donc $a - b = 0$, $a = b$.
2. Si $a < b$, alors, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $e^a < e^b$.
   Réciproquement, supposons que $e^a < e^b$.
   Si on avait $a \geqslant b$, toujours via la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on aurait $e^a \geqslant e^b$, contradiction.
   Donc $a < b$.

□

Exercice 20

Application à la résolution d'équations et d'inéquations :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x+1} < e^{3x-3}$.
Résoudre de même $e^{(x^2)} < e^4$.

III Étude de la fontion exponentielle

Propriété

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstration (à connaître)

1. Limite en $+\infty$.
   Posons $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   Comme $\mathrm{e}^0 = 1$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ est positif pour tout $x \geqslant 0$.
   Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$.

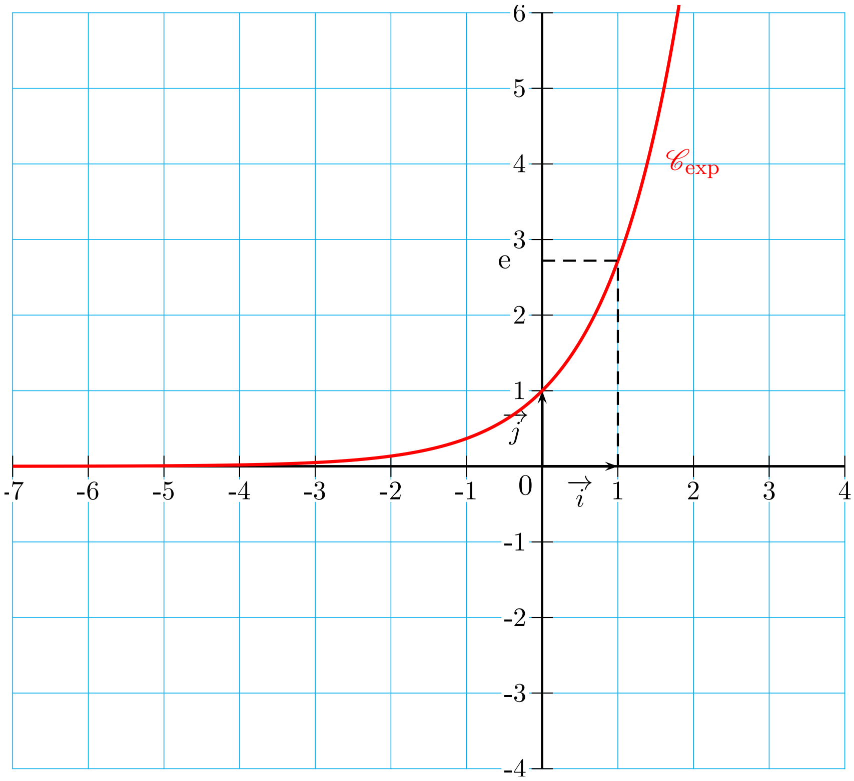
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

   Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 1$.
   A fortiori, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, soit $\mathrm{e}^x \geqslant x$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on peut conclure, par comparaison, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
2. Limite en $-\infty$.
   Posons $Y = -x$, lorsque x tend vers $-\infty$, Y tend vers $+\infty$. On a alors $x = -Y$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{Y \to +\infty} \mathrm{e}^{-Y} = \lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^Y} = 0$, car $\lim\limits_{Y \to +\infty} \mathrm{e}^Y = +\infty$. $\square$

On a vu que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



Remarque
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en $-\infty$.

Théorème (Quelques limites importantes)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration

1. Montrons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

   Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Les fonctions f et f' sont dérivables, et on a $f'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   Or, on a vu que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ (la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$).
   Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant 0$.
   Par conséquent, f' est croissante sur $[0;+\infty[$.
   Comme $f'(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$, il est clair que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$.
   Donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Or, $f(0) = \mathrm{e}^0 - \dfrac{0^2}{2} = 1$, on a montré que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 1 > 0$.

x	$0 \qquad +\infty$
signe de f''	$+$
variations de f'	$1 \nearrow$
signe de f'	$+$
variations de f	$1 \nearrow$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$.
Comme $x > 0$, cela s'écrit aussi $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.
Donc, par comparaison de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

2. Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x\mathrm{e}^x = -\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{-x}}$.
   Si x tend vers $-\infty$, $Y = -x$ tend vers $+\infty$.
   Par composée de limites,
   $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{Y \to +\infty} -\dfrac{Y}{\mathrm{e}^Y} = 0$.
   En effet, on vient de montrer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
3. Montrons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
   La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp' = \exp$.
   Elle est donc dérivable en particulier en 0.
   Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 est $\mathrm{e}^0 = 1$.
   Par définition du nombre dérivé, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. □

IV Exponentielle d'une fonction

IV.1 e^u

Dans ce paragraphe, u est une fonction définie sur un intervalle I, et on considère la fonction e^u (fonction composée $\exp \circ u$), qui, à tout réel x de I associe le réel (positif) $\mathrm{e}^{u(x)}$.

$$\mathrm{e}^u : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{u(x)} \end{array}$$

Exemple :
$f(x) = \mathrm{e}^{3x-5}$, où $u(x) = 3x - 5$.

Théorème (Dérivée de e^u)
Si u est dérivable sur I, alors e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u.$$

En particulier, si $u(x) = ax + b$ (fonction affine)

$$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}.$$

Conséquence (sens de variation)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors u et e^u ont le même sens de variation sur I.

Démonstration
Comme $(e^u)' = u' \times e^u$ et que pour tout $x \in I$, $e^{u(x)} > 0$, il est clair que $(e^u)'$ et u' ont le même signe.
□

Exercice 21
Dériver les fonctions : $f(x) = e^{-2x+1} + 2$.
$g(x) = 5e^{x^2+1}$.

Théorème (limites de e^u)
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit u une fonction définie au voisinage de a.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = 0$.

IV.2 Étude des fonctions $x \mapsto e^{-kx}$, $k > 0$

Soit $k > 0$. Posons $f_k(x) = e^{-kx}$. La fonction f_k est définie sur $\mathbb{R}$.

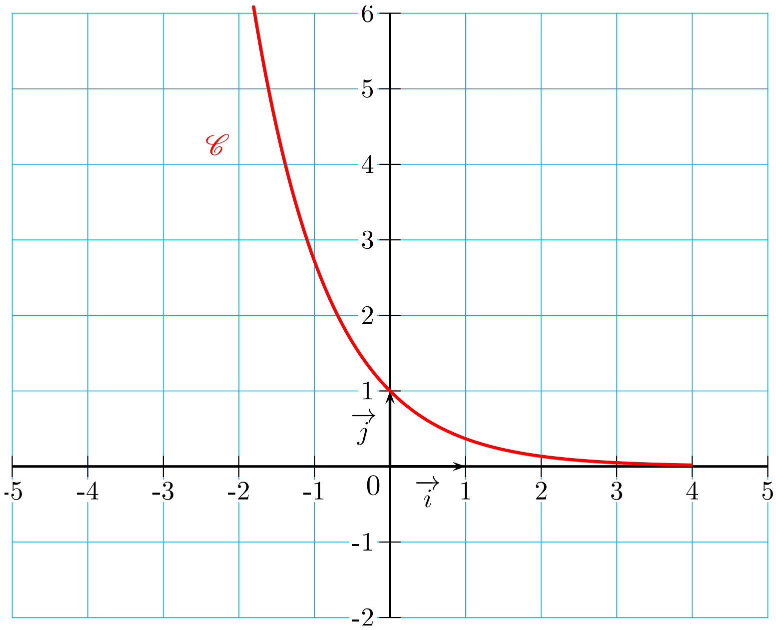
1. Signe
   Une exponentielle est toujours strictement positive.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-kx} > 0$.
2. Variations
   Par composée de fonctions dérivables, f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = -ke{-}kx < 0$ (car $k > 0$).
   Donc f_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Limites
   $\lim\limits_{x\to-\infty} -kx = +\infty$.
   $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.
   Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} -kx = -\infty$.
   $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.
   Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$.

4. Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty \searrow$	0

5. Courbe représentative



Remarque : $f_k(0) = e^0 = 1$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f_k.

IV.3 Étude des fonctions $x \mapsto e^{-kx^2}$, $k > 0$

Soit $k > 0$. Posons $g_k(x) = e^{-kx^2}$. La fonction g_k est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Signe
   Une exponentielle est toujours strictement positive.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-kx^2} > 0$.
2. Variations
   Par composée de fonctions dérivables, g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$.
   Donc g_k' a le même signe que $-2kx$ (soit le signe contraire de x).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction g_k est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet un maximum en 0.

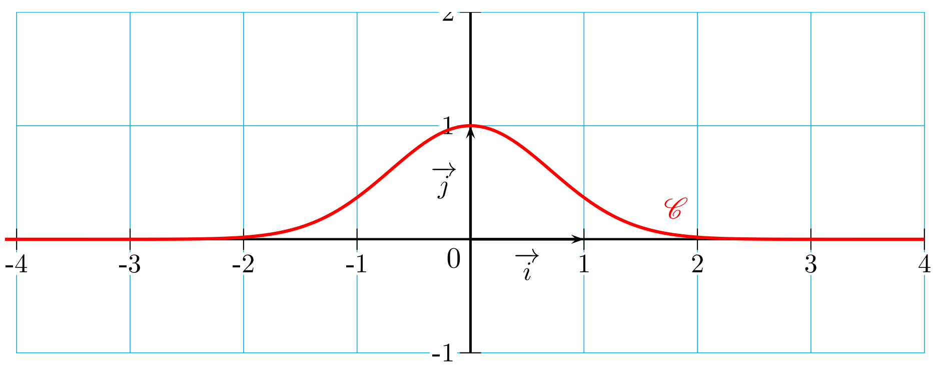
3. Limites
$\lim\limits_{x \to -\infty} -kx^2 = -\infty$.
$\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
Par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -kx^2 = -\infty$.
$\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
Par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_k(x) = 0$.

4. Tableau de variation
$g_k(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. Courbe représentative



Remarque :

1. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g_k(x) = 0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction g_k en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(-x) = g_k(x)$ (la fonction g_k est paire).
Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de g_k est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Chapitre 7

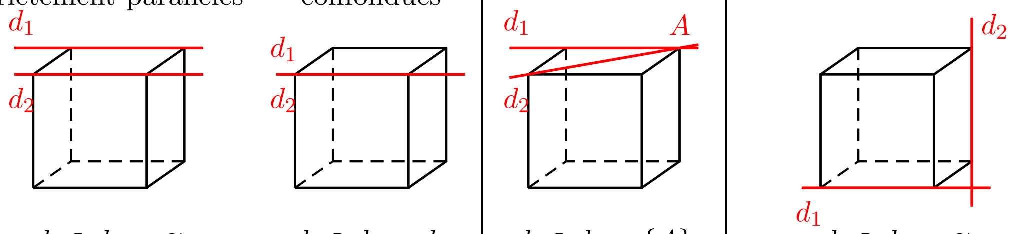
Géométrie dans l'espace

I Positions relatives de droites et plans de l'espace

I.1 Positions relatives de deux droites

> **Propriété**
> Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

d_1 et d_2 sont coplanaires (dans un même plan)			d_1 et d_2 non coplanaires
d_1 et d_2 sont parallèles		d_1 et d_2 sécantes	
strictement parallèles	confondues		

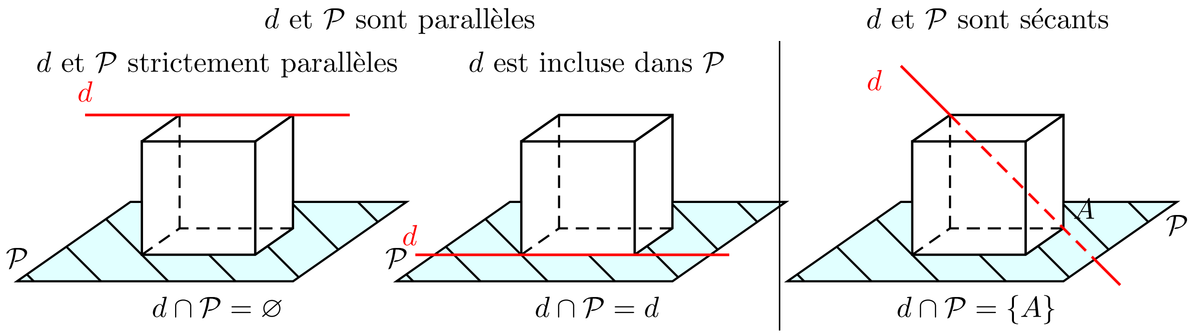


$d_1 \cap d_2 = \varnothing$	$d_1 \cap d_2 = d_1$	$d_1 \cap d_2 = \{A\}$	$d_1 \cap d_2 = \varnothing$

I.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

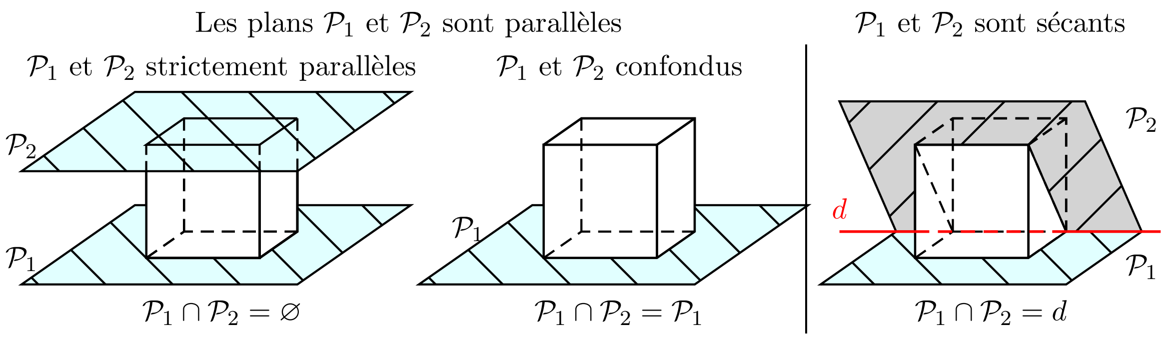
> **Définition**
> Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

> **Propriété**
> Une droite et un plan de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.

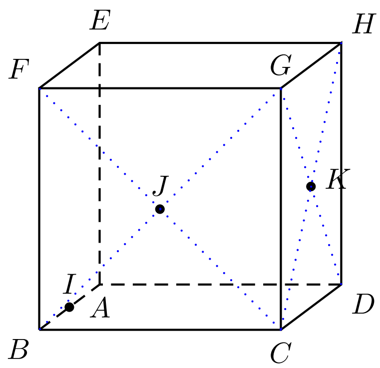


I.3 Positions relatives de deux plans

Propriété
Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.



Exercice 22
Soit un cube $ABCDEFGH$. On note J le centre de la face $(BCGF)$, K le centre de la face $(CDHG)$, et I le milieu de $[AB]$. Étudier les positions relatives des droites :
- (KJ) et (DB)
- (AE) et (IF)
- (AB) et (FC)

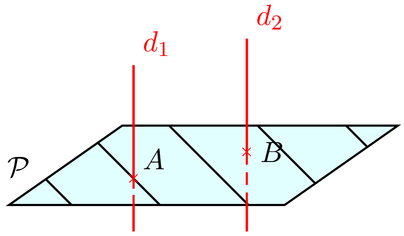


II Parallélisme dans l'espace

II.1 Parallélisme de droites

Propriété

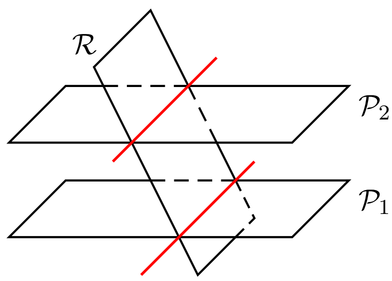
1. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
2. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



II.2 Parallélisme de plans

Propriété (admise)

1. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles.
   Si $\mathcal{R}$ est une plan sécant avec $\mathcal{P}_1$, alors
   — $\mathcal{R}$ est aussi sécant avec $\mathcal{P}_2$,
   — et les droites d'intersection de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.



II.3 Parallélisme d'une droite et d'un plan

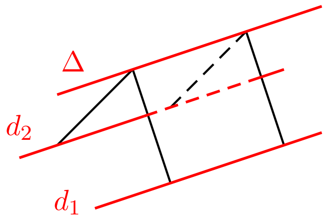
Théorème (théorème du toit)

Si

— les droites d_1 et d_2 sont parallèles,
— d_1 est contenue dans $\mathcal{P}_1$, d_2 est contenue dans $\mathcal{P}_2$,
— les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ,

alors,

la droite Δ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est parallèle à d_1 et à d_2.



Conséquence
Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à la droite d'intersection des deux plans.

Démonstration
Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ.
d_1 est une droite de P_1 et d_2 est une droite de P_2. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
On veut montrer que Δ est parallèle à d_1 et à d_2.
Notons $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de d_1 et d_2.
On raisonne par l'absurde.
Supposons que Δ et d_1 ne soient pas parallèles.
Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P_1.
Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs directeurs du plan P_1.
De même, Δ et d_2 ne sont pas parallèles.
Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont aussi deux vecteurs directeurs du plan P_2.
Comme les plans P_1 et P_2 ont des vecteurs directeurs communs, ils sont parallèles, ce qui est contradiction avec les données.
Donc Δ et d_1 sont parallèles.
Δ est parallèle à d_1 et à d_2. □

III Orthogonalité dans l'espace

III.1 Droites orthogonales

Définition
On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles respectives menées par un même point sont perpendiculaires.

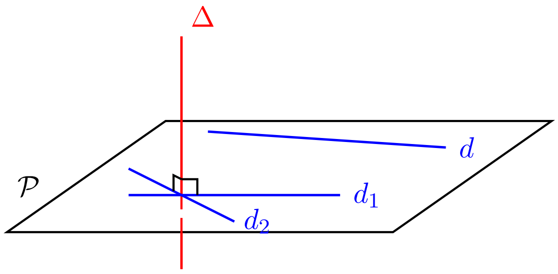
Remarque
Deux droites perpendiculaires sont à la fois orthogonales et sécantes.

Propriété
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

III.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Définition
Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Théorème
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



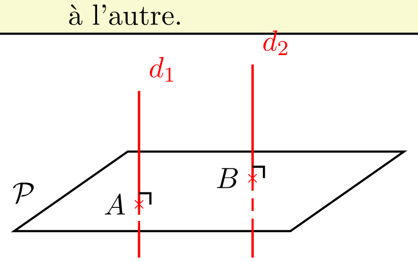
Démonstration (à connaître)
On montre l'équivalence suivante :
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de plan.
La démonstration utilise le produit scalaire.

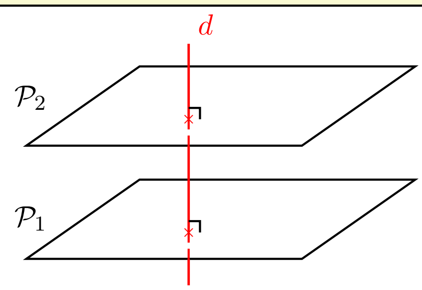
1. Implication directe :
   Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
   Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, et Δ une droite orthogonale à d_1 et à d_2.
   Considérons des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ de d_1, $\overrightarrow{u_2}$ de d_2 et $\overrightarrow{v}$ de Δ.
   Comme $\Delta \perp d_1$, on a $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$.
   De même, $\Delta \perp d_2$, d'où $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$.
   Comme d_1 et d_2 sont sécantes dans $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Autrement dit $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathcal{P}$ (famille de vecteurs directeurs).
   Soit d une droite quelconque de $\mathcal{P}$, montrons que $\Delta \perp d$.
   Considérons $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de d (donc $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$).
   Comme $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u_1}$ et u_2 sont coplanaires, $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et de $\overrightarrow{u_2}$:
   $$\text{Il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}.$$
   Alors, par linéarité du produit scalaire,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} &= \overrightarrow{v} \cdot (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \\ &= a\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} \\ &= a \times 0 + b \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.
   Comme les doites Δ et d ont des vecteurs directeurs orthogonaux, elles sont orthogonales.
   $\Delta \perp d$.
2. Réciproque :
   Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, alors elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
   Cette réciproque est évidente. □

Remarque
Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut montrer que l'une est orthogonale à un plan contenant l'autre.

Propriété

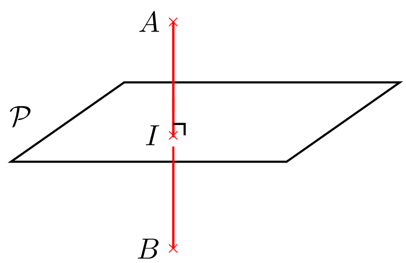
1. Il existe une unique droite passant par un point A donné et perpendiculaire à un plan donné.
2. Il existe un unique plan perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.
3. Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles.
4. Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
5. Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.





III.3 Plan médiateur de deux points distincts

Définition
Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB).



Propriété
Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

Remarque
C'est l'extension à l'espace de la médiatrice d'un segment dans le plan.

Exercice 23 (Étude du tétraèdre régulier)
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ (les arêtes sont toutes de même longueur).
On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $(AB) \perp (CD)$:
   (a) sans utiliser la notion de plan médiateur,

(b) en utilisant un plan médiateur.

2. Montrer que (IJ) est la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).
3. Qu'a-t-on montré au cours de cet exercice ?

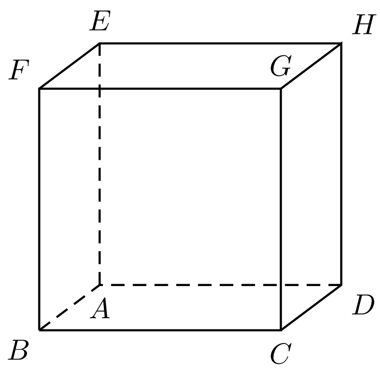
Remarque
Si deux droites d_1 et d_2 sont non coplanaires, alors il existe une unique perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

III.4 Plans perpendiculaires

L'orthogonalité entre deux plans n'est pas au programme de Terminale S.

Définition
Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Exemple :
Dans le cube ci-contre, la droite (CG) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$.
Tout plan contenant la droite (CG) est un plan orthogonal au plan $(ABCD)$.
En particulier, les plans $(HGCD)$ et $(ABCD)$ sont orthogonaux (mais aussi $(EGCA)$ et $(ABCD)$).



IV Vecteurs, droites et plans de l'espace

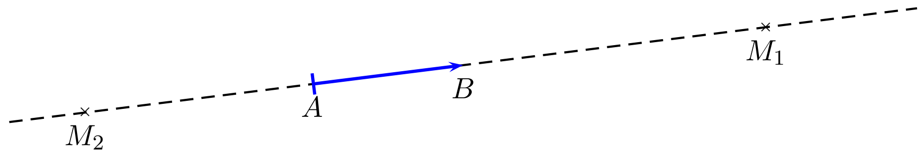
IV.1 Droites

Définition (Rappel)

1. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
   On considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
2. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ($A \neq B$ et $C \neq D$) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Conséquence (Caractérisation d'une droite)
Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

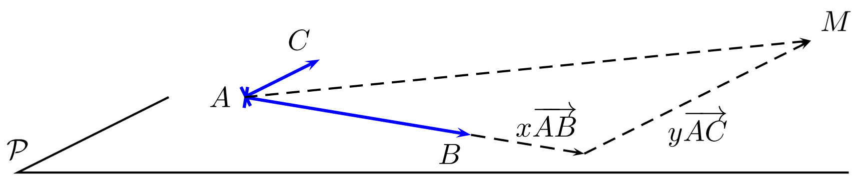
$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$$



IV.2 Plans

Définition
Soient A, B et C trois points non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe des réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$



Remarque
Pour définir un plan, il suffit de donner :
- trois points non alignés A, B et C,
- ou un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
  On dit alors que $(\vec{u}; \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

Définition
Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants, de même origine A, ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Remarque
1. Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
2. Reformulation pour trois vecteurs :
   Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points A, B, C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires (c'est-à-dire dans un même plan).

Propriété

1. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si

   il existe un triplet de réels $(a,b,c) \neq (0;0;0)$ tel que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

2. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet de réels (a,b,c) tel que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ est le triplet $(0,0,0)$.

Propriété (Méthode utile en exercice)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des réels x et y tels que

$$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}.$$

Remarque

1. Dans la propriété précédente, lorsque $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, le couple de réels $(x;y)$ est unique.
2. Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Remarque

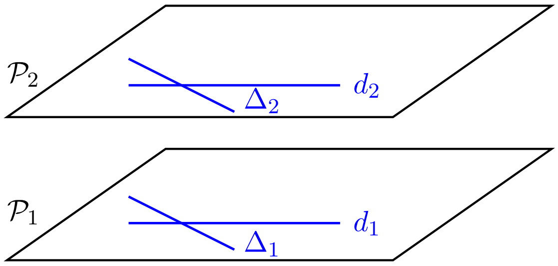
1. Quelques évidences :
   Deux points sont toujours alignés.
   Trois points, deux vecteurs sont toujours coplanaires.
   Trois vecteurs, dont deux sont colinéaires, sont toujours coplanaires.
2. Tout vecteur de l'espace peut s'écrire comme combinaison linéaire de 3 vecteurs non coplanaires, et la décomposition est unique.
   Autrement dit
   Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ 3 vecteurs non coplanaires de l'espace.
   Aors, pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que

$$\overrightarrow{U} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Propriété

1. Une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est contenu dans $\mathcal{P}$.
2. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan $\mathcal{P}'$.

Remarque
Autre formulation :
Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}_1$ sont respectivement parallèles à deux droites (sécantes) d'un plan $\mathcal{P}_2$, alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.


$\mathcal{P}_2$
d_2
Δ_2
$\mathcal{P}_1$
d_1
Δ_1

Chapitre 8

Repérage dans l'espace

I Repère de l'espace

Propriété
Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

Démonstration

1. Existence.
   Soient O et A deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$.
   La droite Δ passant par A dirigée par $\overrightarrow{k}$ coupe le plan $(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ en un point H.
   Comme H et O sont dans le plan $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, il existe des réels x, y tels que $\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
   Comme A et H appartiennent à la droite Δ (dirigée par $\overrightarrow{k}$), il existe un réel z tel que $\overrightarrow{HA} = z\overrightarrow{k}$.
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} \\ &= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \end{aligned}$$
2. Unicité.
   Considérons deux combinaisons linéaires d'un même vecteur $\overrightarrow{u}$:
   $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.
   Par soustraction, on a alors $(x - x')\overrightarrow{i} + (y - y')\overrightarrow{j} + (z - z')\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.
   Comme les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires, on en déduit que
   $\begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \\ z - z' = 0 \end{cases}$, d'où $(x = x', y = y', \text{ et } z = z')$.
   La décomposition de $\overrightarrow{u}$ suivant les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ est unique. $\square$

Remarque (vocabulaire)
Si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires, on dit que $\left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ est une base de l'espace.
Le triplet $(x; y; z)$ est le triplet des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$.

Définition

- Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$ où O est un point, et $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace ($\left(\vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$ une base).
- Le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$ est orthonormé si les vecteurs de base sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux ($\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, et $\vec{j} \perp \vec{k}$).

Définition

Dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$, les coordonnées d'un point M de l'espace sont l'unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

c'est-à-dire que M a les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On dit que x est l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa cote (sans accent).

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$de l'espace.

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si ($x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$).
2. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

Propriété

Soient A et B deux points donnés par leurs coordonnées $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$. Alors :

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

2. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

I.1 Distance dans l'espace

Théorème
Soit $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Conséquence (distance entre deux points)
Dans un repère orthonormé,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple :
Soient $A(1; 3; -1)$, $B(3; 6; -2)$ et $C(0; 4; 0)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Application :
Déterminer une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(1; 2; -1)$ et de rayon 3.
$M \in \mathscr{S}$ si et seulement si $\Omega M = 3$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} &= 3 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 & \end{aligned}$$

Propriété (Équation d'une sphère)
Dans un repère orthonormé, la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Démonstration
$M \in \mathscr{S}$ ssi $\Omega M = r$.
Comme c'est une égalité entre deux nombres positifs, cela équivaut encore à $\Omega M^2 = r^2$.
En passant aux coordonnées, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. □

II Représentations paramétriques

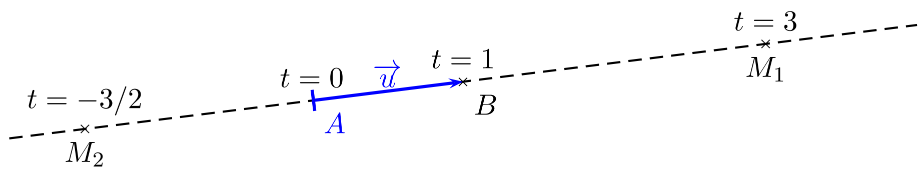
II.1 Représentation paramétrique d'une droite

Définition (et théorème)
Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.
La droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ pour lesquels il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé une équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
Le réel t s'appelle le paramètre.

Démonstration
$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
Donc $M \in \mathscr{D}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.
or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}$, et $t\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}ta\\tb\\tc\end{pmatrix}$.
D'où
$\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$, et donc $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$. □



Remarque
1. À tout réel t, il correspond un unique point sur la droite $\mathscr{D}$ (par exemple, le point de paramètre $t = 0$ est A), et réciproquement à chaque point de la droite correspond une seule valeur de t.
2. Il existe une infinité d'équations paramétriques pour une même droite (ni le point A, ni le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ ne sont uniques).
3. Il est possible de paramétrer des parties de droite.

   Par exemple, avec les notations précédentes, $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, $t \in [0;1]$ est une représentation du segment $[AB]$ où B est le point de paramètre 1.

Le sytème $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, $t \geqslant 0$ représente la demi-droite $[AB)$.

Propriété
Réciproquement, pour tous réels α, β, γ, et a, b, c avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, le système

$$\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(\alpha; \beta; \gamma)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque
Un système d'équation paramétrique étant donné, on peut lire facilement les coordonnées d'un point de la droite, et les coordonnées d'un vecteur directeur.

Exemple :
Le système

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est une équation paramétrique de la droite passant par le point $A(2; -1; 2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

II.2 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème (et définition)
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.
Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe des réels t et t' tels que

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Propriété
Réciproquement, soient x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', et c' des réels tels que $(a;b;c)$ ne soit pas proportionnel à $(a';b';c')$.
Alors le système

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} , t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique du plan passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Remarque
Un plan a une infinité de représentations paramétriques.

Chapitre 9

Fonctions trigonométriques

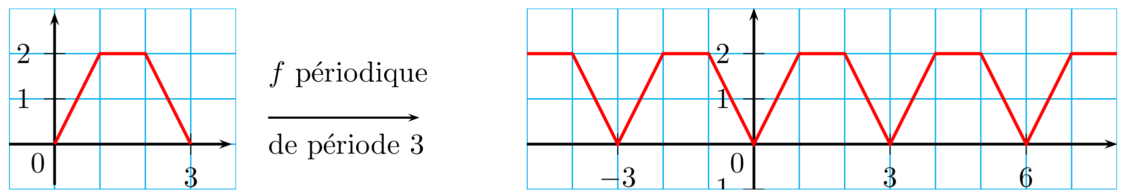
I Fonctions cosinus et sinus

I.1 Périodicité

Définition
Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $T > 0$ un nombre strictement positif.
On dit que f est périodique de période T (ou T-périodique) lorsque pour tout x réel :

$$f(x+T) = f(x)$$

Conséquence graphique
Lorsqu'une fonction est T-périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$ (et aussi $2T\overrightarrow{i}$, $3T\overrightarrow{i}$, ..., $-T\overrightarrow{i}$, ...).
Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur T (par exemple $[0;T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.



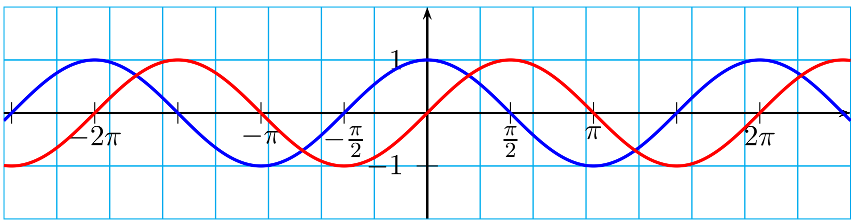
I.2 Étude des fonctions cos et sin

Théorème

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
2. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl}\cos(-x) & = & \cos(x)\\ \sin(-x) & = & -\sin(x)\end{array}$$
3. Tableaux de variation sur $[0; 2\pi]$.

x	0		π		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto \cos x$

Remarque

1. La 2π-périodicité des fonctions cos et sin donne de façon plus générale :
   Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire.
   La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = \sin(x)$. La fonction sinus est impaire.
   La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport au point O.
4. La courbe de la fonction sin s'obtient à partir de celle de la fonction cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
   En effet, pour tout x réel, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
   On a utilisé la relation $\cos(-X) = \cos(X)$ appliquée à $X = x - \frac{\pi}{2}$. Comme $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, la courbe de la fonction sin s'obtient à partir de celle de la fonction cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Théorème (Dérivation)
Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x).$$

Propriété
Soient a et b deux réels, et f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax+b)$ et $g(x) = \sin(ax+b)$. Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -a\sin(ax+b)$$

$$g'(x) = a\cos(ax+b)$$

Démonstration
On utilise le théorème de dérivation de $v(ax+b)$.

$$[v(ax+b)]' = av'(ax+b)$$

Pour $f(x) = \cos(ax+b)$, on a $v(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$.
$f'(x) = a \times \cos'(ax+b) = a \times [-\sin(ax+b)] = -a\sin(ax+b)$.
Pour $f(x) = \sin(ax+b)$, on a $v(x) = \sin x$ et $v'(x) = \cos x$.
$f'(x) = a \times \sin'(ax+b) = a\cos(ax+b)$.

Propriété (à connaître)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration
On sait que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$ (on a admis ce résultat).
En particulier, la fonction sin est dérivable en 0, et d'après la définition du nombre dérivé,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \\
&= \sin'(0) \\
&= \cos(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque
Les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Exercice 24
En remarquant un taux d'accroissement, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

II Formules de trigonométrie

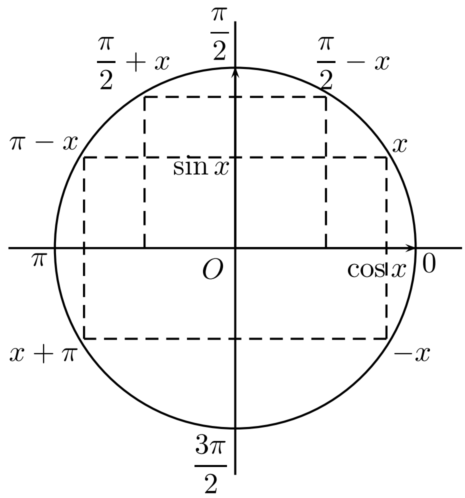
Pour tous réels a, b, x, on a les formules suivantes.

Le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

Angles associés. À savoir lire sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x)\\
\sin(-x) &= -\sin(x)\\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x)\\
\sin(x+\pi) &= -\sin(x)\\
\cos(\pi-x) &= -\cos(x)\\
\sin(\pi-x) &= \sin(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos(x)
\end{aligned}$$



Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Formules de soustraction

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

On les retrouve en remplaçant b par $(-b)$ dans les formules d'addition.

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

On les retrouve en remplaçant b par a dans les formules d'addition.

Formules de linéarisation

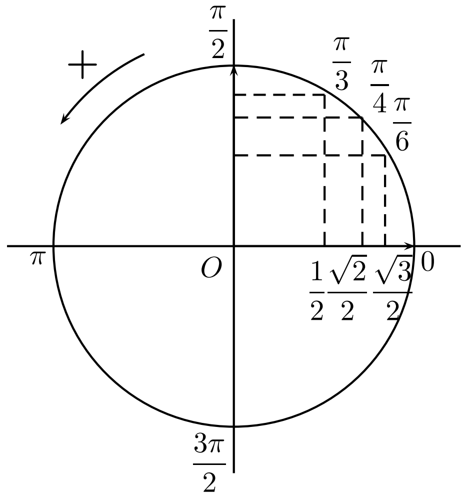
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

C'est la formule de duplication de $\cos(2a)$ écrite autrement.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

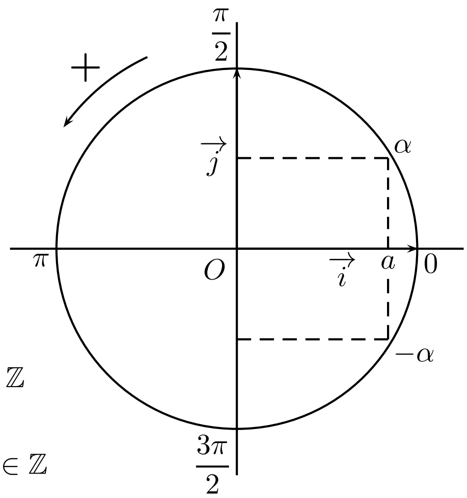


II.1 Équations $\cos(x) = a$, $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Équation $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

— Si $a < -1$ ou si $a > 1$, on remarque que l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

— Sinon, $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = a$.
$\cos(x) = a \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\alpha)$.
En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :

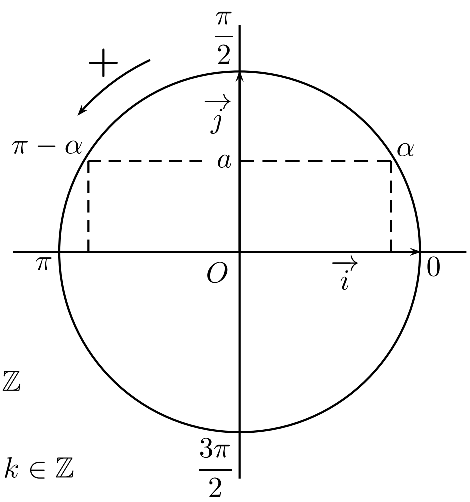


$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou & \\ x = -\alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Équation $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

— De même que précédemment, si $a < -1$ ou si $a > 1$ l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

— Sinon, $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\alpha) = a$.
$\sin(x) = a \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\alpha)$.
En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :



$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou & \\ x = \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

III Complément : la fonction tangente

Définition
On appelle tangente et on note tan la fonction définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Elle est définie en tout nombre réel x tel que $\cos(x) \neq 0$.
Son ensemble de définition est $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété
La fonction tangente est impaire et π-périodique.

Théorème
La fonction tangente est dérivable sur $D_{\tan}$ et on a pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Démonstration
Ces résultats sont en partie démontrés dans le devoir maison. □

IV Exercices

Exercice 25
Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.
2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Ox) sur $[0; 2\pi]$.
3. Montrer que $f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 26 (Symbole p 243)
$f(t) = 5\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 27 (Symbole 30 p 248)
f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{2}{5}\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

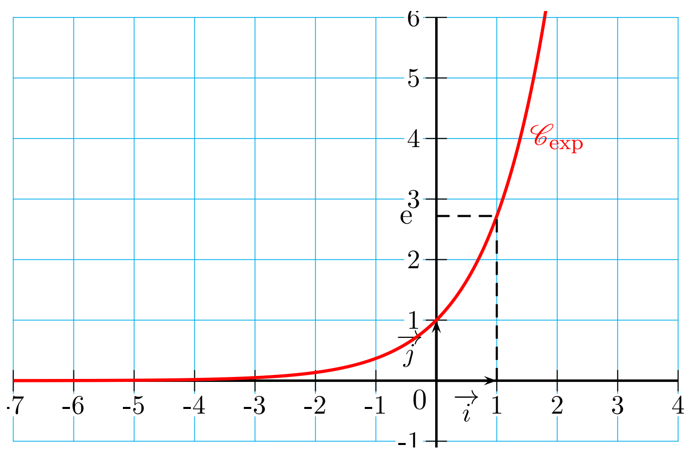
1. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
2. Montrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.
3. Résoudre l'équation $f'(t) = 0$ dans $I = \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur I.

Chapitre 10

Logarithmes

I La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le corollaire du théorème des théorème des valeurs intermédiaires,
pour tout $k > 0$, il existe un unique réel a tel que $\mathrm{e}^a = k$.
Ceci permet de définir une nouvelle fonction, la fonction logarithme népérien.

I.1 Définition

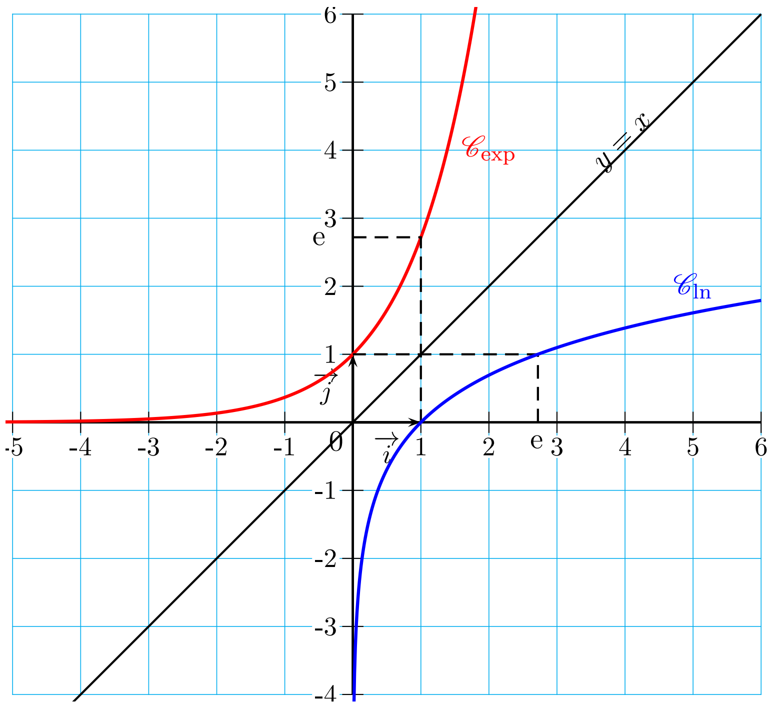
Définition
La fonction logarithme népérien, notée ln est définie sur $]0;+\infty[$ de la façon suivante :
pour tout $k > 0$, $\ln k$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue a $\mathrm{e}^a = k$.
Autre formulation :
pour tout $k > 0$, $\ln k$ est l'unique antécédent de k par la fonction exponentielle.

Exemple :
Comme $\exp(0) = 1$, alors $\ln(1) = 0$.
Comme $\exp(1) = \mathrm{e}$, alors $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Propriété
Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^y$$

Remarque
On dit que ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



I.2 Propriétés

Propriété

1. La fonction ln est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
3. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
4. $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$.
5. La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$,
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
6. La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   (a) $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$.
   (b) $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$.
7. Pour tous a et b strictement positifs,
   (a) $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.
   (b) $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

Démonstration

1. On admet la continuité de ln sur $]0;+\infty[$.
2. La propriété se déduit directement de la définition.
3. $\ln 1 = 0$ car $\mathrm{e}^0 = 1$, et $\ln \mathrm{e} = 1$ car $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
4. Soient $a > 0$ et $x > 0$, avec $x \neq a$. On forme le taux d'accroissement de ln entre a et x, et on cherche sa limite lorsque x tend vers a.
$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \\ &= \frac{\ln x - \ln a}{\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^{\ln a}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^{\ln a}}{\ln x - \ln a}} \end{aligned}$$
Comme ln est continue, $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$.
Posons $X = \ln x$, Par définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en $\ln a$,
$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^{\ln x} - \mathrm{e}^{\ln a}}{\ln x - \ln a} &= \lim_{X \to \ln a} \frac{\mathrm{e}^X - \mathrm{e}^{\ln a}}{X - \ln a} \\ &= \exp'(\ln a) \\ &= \mathrm{e}^{\ln a} \\ &= a \end{aligned}$$
Ainsi, $\lim\limits_{x \to a} r(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} = \dfrac{1}{a}$. La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
Donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

6. Soit $x > 0$.
Comme ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $x < 1$ implique $\ln x < \ln 1 = 0$, et de même $x > 1$ implique que $\ln x > 0$.
Réciproquement, si $\ln(x) < 0$, alors $0 < x < 1$ ($x > 0$ car sinon $\ln x$ n'est pas défini).
En effet, si on avait $x \geqslant 1$, on obtiendrait $\ln x \leqslant 0$, en contradiction avec $\ln x < 0$.
De même, on montre par l'absurde que $\ln x > 0$ implique $x > 1$.
7. Ces équivalences découlent de la stricte croissance de ln sur $]0;+\infty[$. □

I.3 Relation fonctionnelle

Théorème (Règles de calcul)
Pour tous a et b strictement positifs, et pour tout entier relatif n :

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$,
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$,
4. $\ln(a^n) = n\ \ln a$,
5. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Démonstration

1. $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = a \times b$, et $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = a \times b$.
Donc $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$, soit $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. Soit $a > 0$.
Comme $a \times \dfrac{1}{a} = 1$,
$$\begin{array}{rcl} \ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) & = & \ln a + \ln \dfrac{1}{a} \\ \ln(1) & = & \ln a + \ln \dfrac{1}{a} \\ 0 & = & \ln a + \ln \dfrac{1}{a} \end{array}$$
Donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.
3.
$$\begin{array}{rcl} \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) & = & \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) \\ & = & \ln a + \ln \dfrac{1}{b} \\ & = & \ln a - \ln b \end{array}$$
4. ***(a) Cas des entiers positifs.***
On raisonne par récurrence.
On va montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\ln(a^n) = n\ \ln a$.
Notons $P(n)$ la propriété $\ln(a^n) = n\ \ln a$.
Initialisation
Pour $n = 0, \ln(a^0) = \ln 1 = 0$, et $0 \times lna = 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité
Soit $k \geqslant 0$. Supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.

$$\begin{aligned} \ln(a^{k+1}) &= \ln(a^k \times a) \\ &= \ln(a^k) + \ln a \\ &= k \times \ln a + \ln a \\ &= (k+1)\ln a \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
La propriété est héréditaire.
Conclusion
Par récurrence, on a montré que pour tout $n \geqslant 0$ $\ln(a^n) = n\ \ln a$.
(b) Cas des entiers négatifs.
Soit $n < 0$, alors $-n > 0$.
$a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ avec $-n > 0$.

$$\begin{aligned} \ln(a^n) &= \ln \frac{1}{a^{-n}} \\ &= -\ln(a^{-n}) \\ &= -(-n)\ln a \\ &= n \ln a \end{aligned}$$

5. On a $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln a$.
   Donc $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$. $\square$

I.4 Limites liées à la fonction logarithme népérien

Propriété

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
2. Le tableau de variation de ln est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$	1	$+$	
$\ln x$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

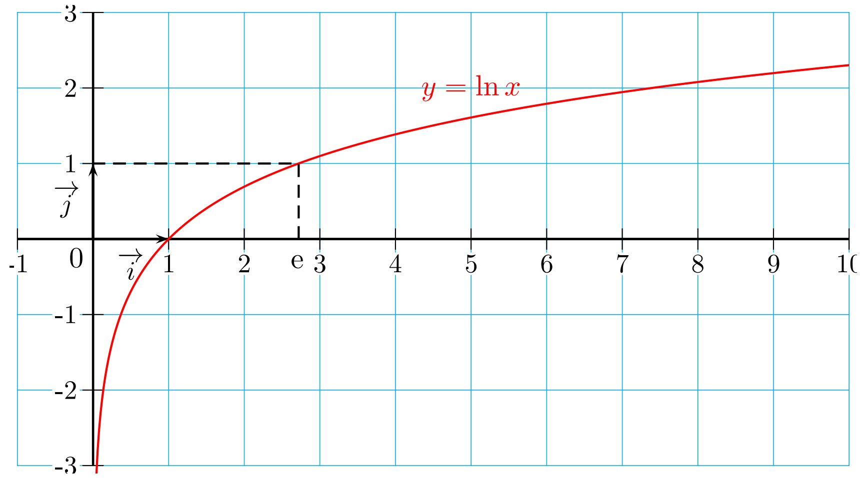
Démonstration

1. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
   Soit $A > 0$.
   On doit montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $\ln x > A$.
   Or, $\ln x > A$ revient à $\mathrm{e}^{\ln x} > \mathrm{e}^A$, soit $x > \mathrm{e}^A$.
   Donc $a = \mathrm{e}^A$ convient.
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
2. Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.
   Pour tout $x > 0$, $\ln x = -1 \times (-\ln x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et on vient de montrer que $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

Donc par composée, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

Comme, pour tout $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, les opérations sur les limites donnent le résultat : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$. □



Remarque
Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{\ln}$.

Propriété

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Démonstration

1. On remarque que $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+h$ car $\ln 1 = 0$.
   Donc $\dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$.
   La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   En particulier, ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
   Par définition du nombre dérivé, on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{x} &= \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln x}} \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x}\right)} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$.

Par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$.

En passant à l'inverse, il vient $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. □

Exercice 28

Montrer que $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.

Indication : se ramener à $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

II Logarithme d'une fonction

Dans ce paragraphe, u est une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur I, c'est-à-dire que u est à valeurs dans $]0;+\infty[$:

$$\text{pour tout } x \in I,\ u(x) > 0.$$

On étudie la fonction $\ln(u)$, notée $\ln u$.

La fonction $\ln u$ est alors bien définie sur I.

$$\ln u : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(u(x)) \end{cases}$$

Exemple :

Prenons $u(x) = 2x - 6$.

On s'intéresse donc à la fonction $f(x) = \ln(2x - 6)$.

Déterminons son domaine de définition.

Pour que $f(x)$ existe, il faut que $u(x) = 2x - 6 > 0$.

$2x - 6 = 0$ donne $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

Donc la fonction $f(x) = \ln(2x - 6)$ est définie sur $]3;+\infty[$.

Théorème (Dérivée de $\ln u$)
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.
Alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Conséquence
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.
Alors u et $\ln u$ ont même sens de variation sur I.

Sur l'exemple précédent, $f(x) = \ln(2x - 6)$ et $u(x) = 2x - 6$, comme u est croissante sur $]3;+\infty[$, alors f est également croissante sur $]3;+\infty[$.

Remarque (Cas particulier)
Soit u une fonction affine d'expression $u(x) = ax + b$ prenant des valeurs strictement positives sur I.
Alors, la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax + b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$f'(x) = \frac{a}{ax + b}$$

Exemple : $f(x) = \ln(-2x + 3)$.
$-2x + 3 > 0$ si $x \in]-\infty; 1,5[$.
Pour tout $x < 1,5$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-2}{-2x + 3}$.

Remarque
Bilan des formules de dérivées qui utilisent le théorème de dérivation d'une fonction composée : Rappel :

Soient $u : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si u ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.
2. Si $u > 0$ sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
4. La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = e^u u'$.
5. Si $u > 0$ sur I, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
6. Soient v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et a et b des réels.
   Si $f(x) = v(ax + b)$, alors $f'(x) = av'(ax + b)$.

III Fonction logarithme décimal

Définition
On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée log définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque
Pour tout entier n, $\log 10^n = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \dfrac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.

Propriété

1. $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.
2. La fonction log des dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $\log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.
3. La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier n,
   (a) $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$,
   (b) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,
   (c) $\log(a^n) = n\ \log(a)$

IV Exercices de logarithmes sur Euler

— Appliquer les propriétés de calcul sur les logarithmes :
ressource 1241
ressource 1243
ressource 1245
ressource 269
ressource 267
ressource 1235

— Équations avec des logarithmes :
ressource 1717
ressource 272
ressource 271

— Inéquations avec des logarithmes :
ressource 2915
ressource 2917
ressource 2882

Chapitre 11

Nombres complexes ($1^{\text{ère}}$ partie)

I Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition (et théorème)
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans $\mathbb{C}$.
2. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;
3. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels.

Définition
L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est la partie imaginaire de z, elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque

1. Lorsque $b = 0$, z est un nombre réel.
2. Lorsque $a = 0$, ont dit que z est imaginaire pur.

Exercice 29
Montrer que $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Propriété (opérations dans $\mathbb{C}$)
Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes sous leur forme algébrique (a, b, a', b' réels).

1. Somme :
$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$$
2. Produit :
$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + ba')$$
3. Inverse : si $z \neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}$$
4. Quotient : si $z' \neq 0$,
$$\frac{z}{z'} = \frac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = (a + \mathrm{i}b) \times \frac{1}{a' + \mathrm{i}b'}$$

Remarque
Pour l'écriture algébrique d'un nombre complexe, on ne laisse pas de i au dénominateur.
Si le dénominateur est $(a + ib)$, on multiplie au numérateur et au dénominateur par son conjugué $(a - ib)$.
Le dénominateur devient $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Exercice 30
Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{1 - 3\mathrm{i}}$ et $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

Remarque
On a $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, et $\mathrm{i}^4 = 1$.
On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{i}^{4n} = 1$, $\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{4n+2} = -1$, et $\mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$.
En particulier, $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

Propriété (égalité de deux nombres complexes)
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Autrement dit, si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ avec a, b, a', b' réels, alors
$$z = z' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

Conséquence
Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels. Alors,
$$z = 0 \text{ si et seulement si } (a = 0 \text{ et } b = 0).$$

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition
Soit $z = a + \mathrm{i}b$, avec a, b réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Exemple :
$\overline{3+5\mathrm{i}} = 3 - 5\mathrm{i}$.

Remarque

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$.

Propriété
Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
4. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. $z\overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.
6. z est un nombre réel si et seulement si z est égal à son conjugué.
$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$
7. z est imaginaire pur si et seulement si z est égal à l'opposé de son conjugué.
$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$$

Démonstration

1. $\overline{(a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b')} = \overline{(a + a') + \mathrm{i}(b + b)} = a + a' - \mathrm{i}(b + b') = (a - \mathrm{i}b) + (a' - \mathrm{i}b') = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. On procède de même en passant aux formes algébriques.
3. On raisonne par récurrence.
4. On procède comme pour 1.
5. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique (a et b réels).
$z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b = 0$.
Or, $z = \overline{z}$ si et seulement si $a + \mathrm{i}b = a - \mathrm{i}b$, ce qui équivaut à $b = 0$.
On a vu que deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
6. z est imaginaire pur si et seulement si $a = 0$. □

III Équation du second degré à coefficients réels

Propriété
Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c réels, $a \neq 0$.
Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes (non réelles) :
$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration
On montre le résultat du 3. Les points 1. et 2. ont été vus en première.
On part de la forme canonique, $P(z) = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$, et l'on peut écrire $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$.
Ainsi, $\Delta = -(\sqrt{-\Delta})^2 = \mathrm{i}^2\sqrt{-\Delta}^2 = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
On peut alors factoriser le polynôme $P(z)$ via une identité remarquable à l'aide de facteurs complexes :

$$\begin{aligned}
P(z) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(z + \frac{b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'équation $P(z) = 0$ équivaut à $z = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$. □

Exercice 31
Modifier le programme de résolution des équations du second degré à la calculatrice vu en première pour qu'il renvoie la forme algébrique des solutions complexes lorsque $\Delta < 0$ (Penser à utiliser la fonction Math ►Frac).

Chapitre 12

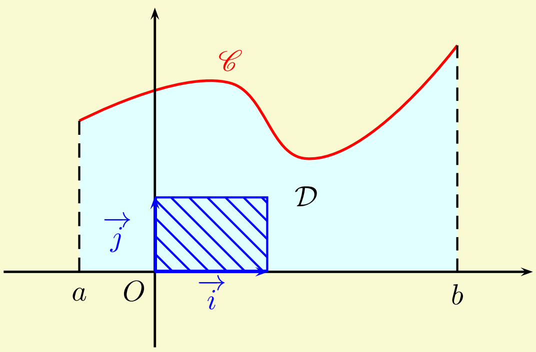
Calcul intégral

I Intégrale d'une fonction positive

I.1 Définition

Définition

1. Dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on appelle unité d'aire l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.
2. Soient f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



   On appelle intégrale de f de a à b l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine démilité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
   Cette intégrale se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et se lit « intégrale de a à b de f ».

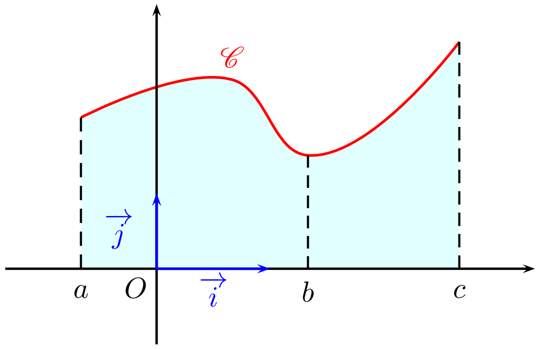
Remarque
La variable x peut être remplacée par n'importe quelle autre variable :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que la variable est muette.

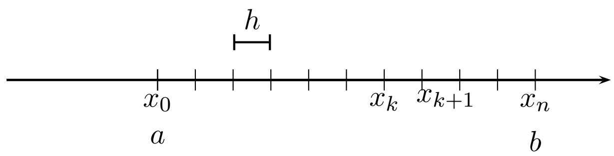
Remarque (Relation de Chasles sur les intégrales)
Soit f une fonction continue et positive sur I.
Pour tous réels a, b et c de I avec $a < b < c$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$



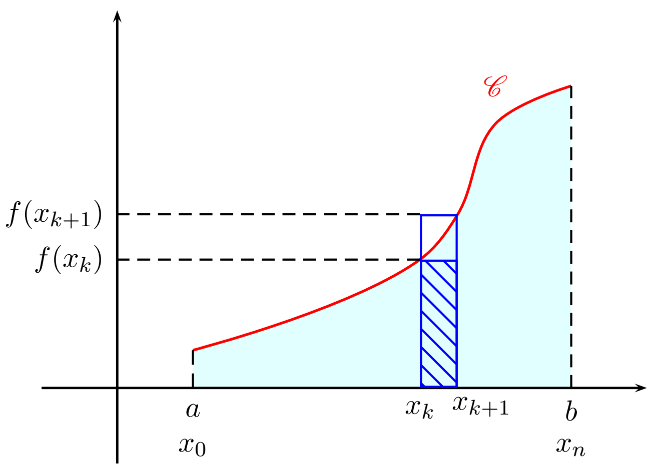
I.2 Méthode des rectangles pour encadrer une intégrale

On suppose que la fonction f est continue, positive, et monotone sur l'intervalle $[a;b]$. Pour approcher l'intégrale de a à b de f, on partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$.
On pose $x_0 = a$, et pour $0 \leqslant k \leqslant n$ $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n} = x_0 + k \times h$.



Sur chacun de ces intervalles $[x_k;x_{k+1}]$, on peut encadrer l'aire sous la courbe de f par des aires de rectangles.
Dans le cas où f est croissante sur $[x_k;x_{k+1}]$, on a

$$h \times f(x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_{k+1})$$



D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}x.$
L'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$ est alors comprise entre la somme des aires des rec-

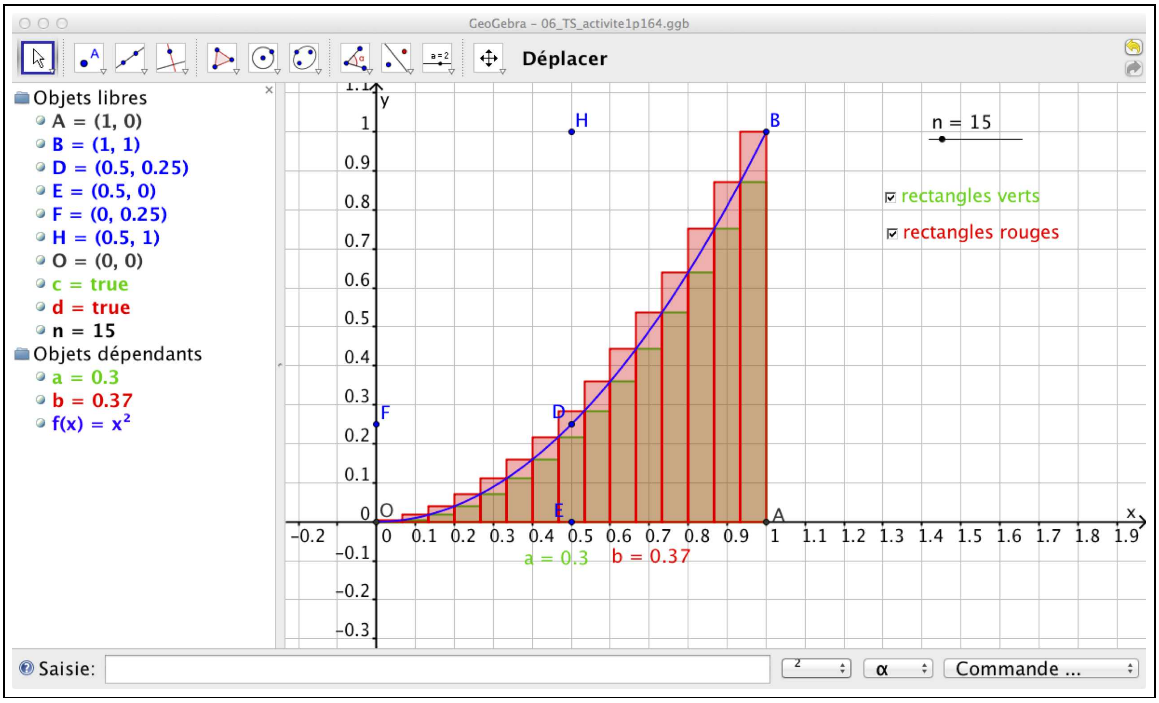
tangles « sous » la courbe et la somme des aires des rectangles « au-dessus » de la courbe.

Toujours dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a;b]$, on obtient l'encadrement

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$$

soit

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$



Algorithme associé à la méthode des rectanges :

DÉBUT
Entrer f, a, b, n.
h prend la valeur $\dfrac{b-a}{n}$
x prend la valeur a
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à $n-1$
    U prend la valeur $U + h \times f(x)$
    x prend la valeur $x + h$
    V prend la valeur $V + h \times f(x)$
Fin pour
Afficher U, V
FIN

Remarque

1. Dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a;b]$, on a

$$U \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant V.$$

Si f est décroissante sur $[a;b]$, l'algorithme reste valable et on a cette fois

$$V \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant U.$$

2. La méthode des rectangle et l'algorithme restent valables dans le cas où f est seulement continue et monotone sur $[a;b]$ (f de signe quelconque, voir paragraphe IV).

Programmation de l'algorithme à la calculatrice

Texas

La fonction f étant entrée dans Y_1.

```
Prompt A,B,N
(B − A)/N → H
A → X
0 → U
0 → V
For(K, 0, N − 1)
U + H ∗ Y1(X) → U
X + H → X
V + H ∗ Y1(X) → V
End
Disp U,V
```

Attention : Y_1 s'obtient par $\boxed{\text{var}}$, VAR-Y, Fonction, Y_1.

Casio

La fonction f étant entrée dans Y_1.

```
? → A
? → B
? → N
(B − A)/N → H
A → X
0 → U
0 → V
For 0 → K To N − 1
U + H ∗ Y1(X) → U
X + H → X
V + H ∗ Y1(X) → V
Next
U ◢
V ◢
```

II Primitives d'une fonction continue

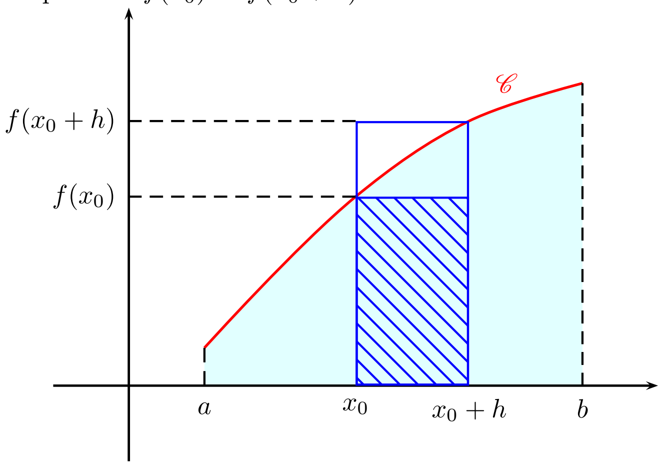
Théorème (fondamental)
Si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.
On a donc pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration (cas où f est croissante)
On se limite au cas où f est croissante pour la démonstration.
On suppose que f est continue, positive, et croissante sur $[a;b]$.
Soit $x_0 \in [a;b]$, et h un réel tel que $x_0 + h \in [a;b]$.

— 1er cas : si $h > 0$.
  D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t$,
  c'est-à-dire $F(x_0+h) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t$.
  Comme f est croissante sur $[a,b]$, on peut encadrer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t$ par :

$$h \times f(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_0+h)$$

On a encadré l'aire sous la courbe par les aires des rectangles de largeur $x_0 + h - x_0 = h$ et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.



Comme $h > 0$, on a donc

$$h \times f(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_0+h)$$
$$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$
$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

D'après le théorème des gendarmes, si $h > 0$, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

— $2^{\text{ème}}$ cas : si $h < 0$.
On établit de même l'encadrement

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Il vient toujours d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

On a donc montré que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.
Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
On a montré ce résultat pour un réel x_0 quelconque de l'intervalle $[a;b]$, donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$. □

Remarque

On admet le théorème dans le cas général.

Définition
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est f.
Ainsi, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration
Pour la démonstration, on se limite au cas où $I = [a;b]$ et où f admet un minimum m sur I.
La fonction g définie par $g(x) = f(x) - m$ est continue et positive sur $[a;b]$.

D'après le théorème fondamental, elle admet pour primitive la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
Alors, la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
En effet, F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$.
Donc f admet des primitives sur $[a;b]$. □

Remarque
On admet le théorème dans le cas général.

Remarque
La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, mais on n'en connaît pas de formule explicite.

Propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, où k est une constante.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration

1. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est également une primitive de f car c'est bien une fonction dérivable sur I (par somme de fonctions dérivables), etpour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.
   Réciproquement, soit G une autre primitive de f.
   Alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.
   Donc la fonction $(G - F)$ est constante sur l'intervalle I, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.
2. Soit $G(x) = F(x) + k$ une primitive de f sur I.
   Pour que $G(x_0) = y_0$, il faut et il suffit que $F(x_0) + k = y_0$, ce qui détermine une unique valeur pour la constante k ($k = y_0 - F(x_0)$).
   Donc il esite une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$. □

III Recherche de primitives

III.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$, $(a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n entier différent de 0 et -1	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$, $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$, $a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

III.2 Opérations sur les primitives

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur I, de primitives respectives F et G.

1. Une primitive de $f + g$ est $F + G$.
2. Pour toute constante $k \in \mathbb{R}$, une primitive de kf est kF.

Démonstration

1. $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
2. $(kF)' = kF' = kf$.

$\square$

Remarque

Attention, $F \times G$ n'est pas en général une primitive de $f \times g$ car $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$.

Propriété (composée)
Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.
2. Une primitive de $u' \times u^n$ avec $n \geqslant 1$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.
3. Pour $n < -1$ et avec u ne s'annulant pas sur I, une primitive de $u' \times u^n$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.
4. Si $u(x) > 0$ sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln u$.
5. Si $u(x) > 0$ sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Démonstration

1. $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
2. $\left(\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' = \dfrac{1}{n+1} \times (n+1)u^n u' = u'u^n$.
3. Idem.
4. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
5. $(2\sqrt{u})' = 2 \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. $\square$

IV Intégrale d'une fonction continue

Propriété
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Si F est une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration
On sait que la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
De plus, si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors il existe une constante k telle que $F(x) = G(x) + k$.
On en déduit que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.
Or, $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et $G(a) = 0$, donc $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. $\square$

Remarque
Cette formule s'étend aux fonctions continues de signes quelconques sur un intervalle I, avec a et b quelconques dans I, et l'on peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

Définition
Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, et a et b deux réels quelconques de I.
On appelle intégrale de f de a à b la différence $F(b) - F(a)$.
On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette intégrale.

Remarque
On peut donc calculer la valeur exacte d'une intégrale dès que l'on connaît une primitive de la fonction.

Propriété
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I, et k un réel quelconque.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Linéarité de l'intégrale :
   (a) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Relation de Chasles :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$
5. Positivité de l'intégrale :
   Si $a < b$ et pour tout $x \in [a;b]$ $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
6. Croissance de l'intégrale.
   Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration
Soient F une primitive de f et G une primitive de g.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$.
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Linéarité de l'intégrale :
   (a) La fonction kF est une primitive de kf, donc
$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x &= (kF)(a) - kF(b)\\ &= k(F(b) - F(a))\\ &= k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(b) La fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$, donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= (F+G)(b)-(F+G)(a)\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

4. Relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x &= F(b)-F(a)+F(c)-F(b)\\ &= F(c)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

5. Ce résultat se déduit directement de la définition de l'intégrale dans le cas où f est positive.
6. Si $f(x)\geqslant g(x)$ sur $[a;b]$, alors $(f-g)\geqslant 0$, et donc, avec le point précédent, $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

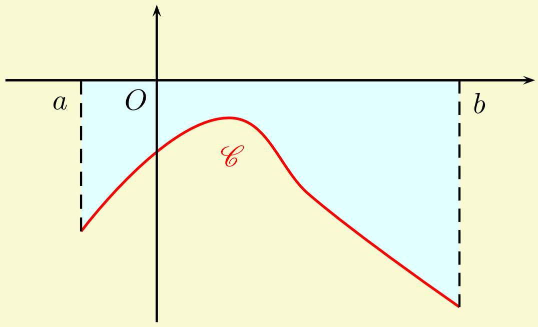
   Par linéarité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

V Applications du calcul intégral

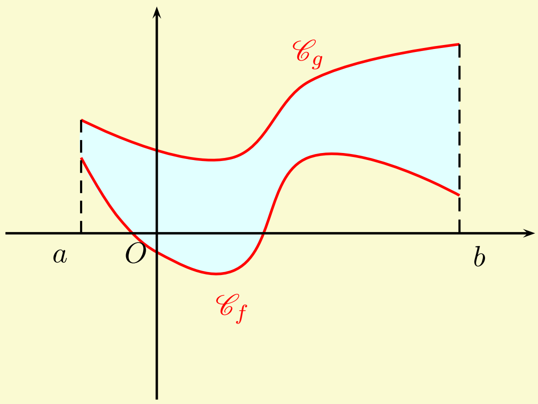
V.1 Calculs d'aires

Propriété

1. Si f est une fonction continue et négative sur $[a;b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



2. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ et telles que pour out $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
   Alors l'aire de la surface comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$.



V.2 Valeur moyenne

Définition
Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel m tel que $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

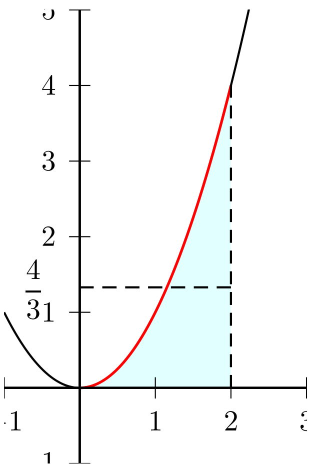
Remarque
Cette égalité s'écrit aussi $m(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, pour une fonction positive, m est la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ qui a la même aire que l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple : Calculons la valeur moyenne de la fonction carré sur $[0;2]$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - 0\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$ est égale à l'aire du rectangle de hauteur $\frac{4}{3}$ et de largeur 2.



Chapitre 13

Lois de probabilité à densité

I Lois de probabilité à densité

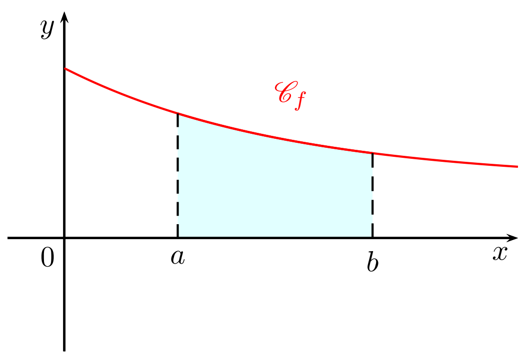
Jusqu'à présent, on a toujours rencontré des variables aléatoires qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (variable discrète).
Par exemple, une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ prend ses valeurs dans $\{0;1;\ldots;n\}$.

Vocabulaire :
On dit qu'une variable aléatoire est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple :
On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0;1]$.
La variable aléatoire X correspondant au nombre obtenu est continue. Les valeurs possibles pour X sont tous les réels de $[0;1]$.

Définition

1. On appelle fonction de densité de probabilité sur l'intervalle I toute fonction définie sur I, continue et positive sur I, et telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.
2. Une variable aléatoire à densité X sur un intervalle I est définie par la donnée d'une fonction de densité de probabilité f définie sur I.
   Alors, la probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[a;b]$ de I est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$, soit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Remarque

1. Avec $[a;b] \subset I$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. $P(X \in I) = 1$ car $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

Exercice 32

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vérifier que f est une fonction de densité de probabilité sur $[1;\mathrm{e}]$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer k pour que g soit une fonction de densité sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};k\right]$.

Propriété
Pour tous réels a et b appartenant à I :

1. $P(X = a) = 0$.
2. $P(X \leqslant a) = P(X < a)$ (on peut échanger inégalités larges et strictes).
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - P(X < a)$.
4. $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leqslant a)$.

Définition (espérance)
Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle $[a;b]$.
L'espérance mathématique de X est le réel $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\ \mathrm{d}t$.

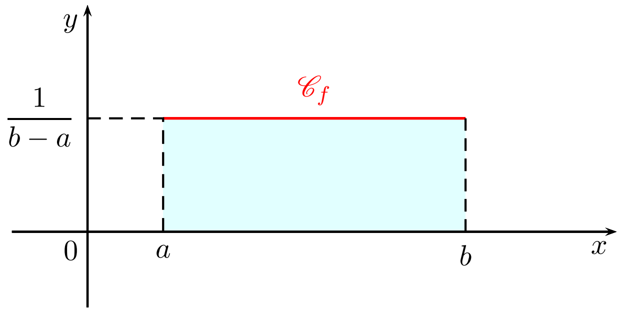
Remarque
On fera le lien avec l'espérance d'une variable aléatoire discrète :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i P(X = x_i).$$

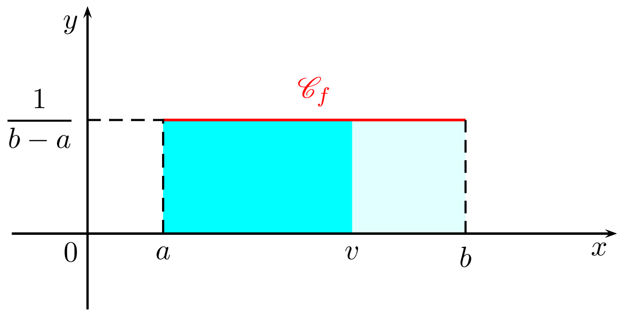
II Loi uniforme sur $[a;b]$

Définition
Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Exercice 33
Vérifier que $f : \begin{array}{rcl} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{b-a} \end{array}$ est bien une fonction de densité de probabilité sur $[a;b]$.



Propriété
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$.
Alors, pour tout $v \in [a;b]$, $P(a \leqslant X \leqslant v) = \dfrac{v-a}{b-a}$.



Démonstration
La densité de probabilité de X est définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Une primitive de f est donnée par $F(t) = \dfrac{t}{b-a}$.

$P(a \leqslant X \leqslant v) = \displaystyle\int_a^v \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = F(v) - F(a) = \frac{v-a}{b-a}$. $\square$

Remarque

1. Pour tous réels u et v tels que $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$, $P(u \leqslant X \leqslant v) = \dfrac{v-u}{b-a}$.
2. Pour tout $u \in [a;b]$, $P(X \geqslant u) = \dfrac{b-u}{b-a}$.

Ces résultats se montrent de la même façon que la propriété précédente.

Propriété (espérance de la loi uniforme)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

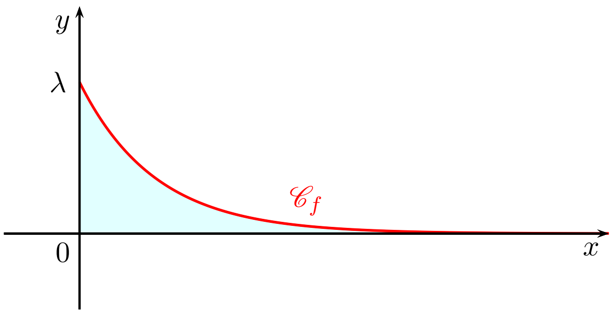
Démonstration

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, en posant $g(t) = t$, une primitive de g sur $[a;b]$ est la fonction G définie par $G(t) = \dfrac{t^2}{2}$.
Donc $E(X) = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\right) = \dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$. $\square$

III Loi exponentielle

Définition
Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$).
Une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

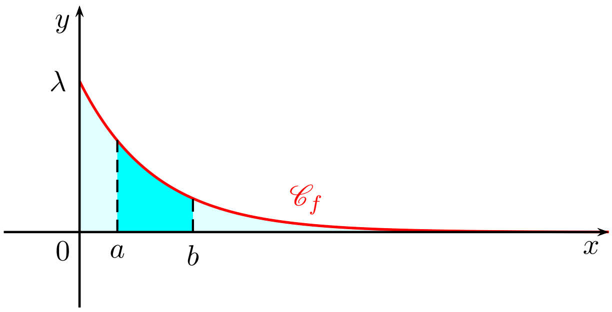


Remarque
1. $f(0) = \lambda$.
2. f est décroissante sur $[0;+\infty[$ (on le montre facilement en dérivant).
3. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1$.

Propriété
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors, pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$,

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

En particulier, $P(T \leqslant b) = 1 - e^{-\lambda b}$ et $P(T > a) = e^{-\lambda a}$.



Démonstration
La fonction $F : x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} P(a \leqslant T \leqslant b) &= \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= F(b) - F(a) \\ &= -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda a}) \\ &= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \end{aligned}$$

En particulier, $P(T \leqslant b) = P(0 \leqslant T \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.
Par suite, $P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$. □

Propriété
Si T suit une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h,

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h).$$

Remarque
Cela traduit le fait que la loi exponentielle est sans mémoire.

Démonstration
Notons A l'événement $T \geqslant t+h$ et B l'événement $T \geqslant t$.
Il est clair que $A \subset B$, donc $A \cap B = A$.

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} \times \mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda h} \\ &= P(T \geqslant h) \end{aligned}$$

Théorème (définition)
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

$$E(T) = \lim_{Y \to +\infty} \int_0^Y x f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{Y \to +\infty} \int_0^Y x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (à connaître)
Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x f(x) = \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
On cherche une primitive de g sous la forme $G(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ avec a et b réels.
Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= a\mathrm{e}^{-\lambda x} + (ax+b) \times (-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= (-\lambda a x + a - \lambda b)\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

La fonction G est une primitive de g sur $[0; +\infty[$ ssi $G' = g$, c'est-à-dire

$$\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} = (-\lambda a x + a - \lambda b)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Il suffit de choisir a et b de sorte que $-\lambda a = \lambda$ et $a - \lambda b = 0$.
Ainsi, $a = -1$ et $b = \dfrac{a}{\lambda} = \dfrac{-1}{\lambda}$.
D'où $G(x) = \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Alors, pour tout réel positif Y,

$$\begin{aligned}
\int_0^Y x f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^Y x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= G(Y) - G(0) \\
&= \left(-Y - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda Y} + \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}(-\lambda Y \mathrm{e}^{-\lambda Y} - \mathrm{e}^{-\lambda Y} + 1)
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{Y\to+\infty} -\lambda Y = -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$. Par composée, $\lim\limits_{Y\to+\infty} -\lambda Y \mathrm{e}^{-\lambda Y} = 0$.
Comme $\lim\limits_{Y\to+\infty} -\lambda Y = -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, il vient par composée $\lim\limits_{Y\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda Y} = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{Y\to+\infty} (-\lambda Y \mathrm{e}^{-\lambda Y} - \mathrm{e}^{-\lambda Y} + 1) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{Y\to+\infty} \displaystyle\int_0^Y x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$, soit $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. $\square$

Chapitre 14

Nombres complexes et géométrie

I Affixe, module et argument

I.1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition
À tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (avec a, b réels), on associe un unique point du plan, le point $M(a;b)$.
Réciproquement, à tout point point $M(a;b)$, on associe le le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z, et que z est l'affixe du point M (z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriété

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$.
4. Si I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
   Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + \mathrm{i}(y_B - y_A) = x_B + \mathrm{i}y_B - (x_A + \mathrm{i}y_A) = z_B - z_A$.
2. On raisonne de même en passant aux coordonnées pour montrer les points 2., 3. et 4..

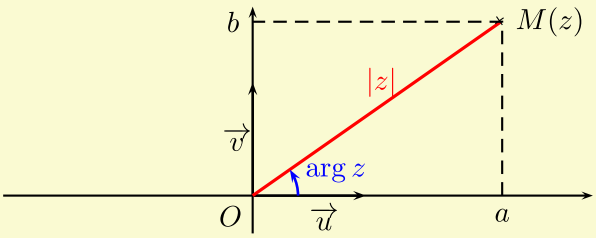
I.2 Module et argument d'un nombre complexe

Définition

Soient $z = a+ib$ avec a, b réels un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

1. Le module de z, noté $|z|$ est la distance OM, soit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. <u>Si z est non nul</u>, un argument de z, noté $\arg z$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$.

$$\text{Pour } z \neq 0,\ \arg z = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}).$$



Remarque

1. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
2. Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments : si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$, alors les autres mesures de cet angle sont les réels $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Le nombre 0 n'a pas d'argument car l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini si $M = O$.

Propriété

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $z \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\arg z = 0 \quad [2\pi]$.
3. $z \in \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\arg z = \pi \quad [2\pi]$.
4. Un nombre complexe z non nul est imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive si et seulement si $\arg z = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
5. Un nombre complexe z non nul est imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative si et seulement si $\arg z = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Propriété

1. Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B, $AB = |z_B - z_A|$.
2. Pour tous points distincts A et B, $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

Démonstration

1. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors l'affixe de M est $z_B - z_A$.
   Par conséquent, $AB = |z_B - z_A|$.
2. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. $M \neq O$ car $A \neq B$.
   $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

□

I.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition
Pour tout nombre complexe z non nul, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Cette écriture est appelée une forme trigonométrique de z.

Remarque
Un nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques car $\arg z$ est défini à 2π près (par contre le module est unique).

Propriété
1. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à un multiple de 2π près.
2. Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta \quad [2\pi]$.

Propriété
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Alors,

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$
- $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$

Ceci permet de retrouver θ.

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :
- $a = r\cos\theta$
- $b = r\sin\theta$

I.4 Propriétés du module et de l'argument

Propriété
Pour tout nombre complexe z,
1. $|\overline{z}| = |z|$, et $|-z| = |z|$.
2. Avec z non nul,

$$\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$$
$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi].$$

Propriété

1. Somme : pour tous nombres complexes z et z',
$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire).}$$
2. Produit : pour tous nombres complexes z et z',
$$|zz'| = |z| \times |z'|.$$
Si de plus z et z' sont non nuls,
$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi].$$
3. Quotient : Pour tous nombres complexes z et z', avec $z' \neq 0$,
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$
Pour tous z et z' non nuls,
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi].$$
4. Puissance : pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|z^n| = |z|^n.$$
Si de plus z est non nul,
$$\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi].$$

Démonstration

1. C'est la formulation avec des nombres complexes d'une inégalité sur les distances.
$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs d'affixes respectives z et z'.
2. z et z' étant non nuls tous les deux, on peut considérer leurs formes trigonométriques.
$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$.
$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times (\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= rr'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)] \\ &= rr'[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')] \end{aligned}$$
On a ainsi obtenu une forme trigonométrique de zz', ce qui implique $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$.
Remarque, si z ou z' est nul, l'égalité $|zz'| = |z| \times |z'|$ est évidemment vraie.
3. On raisonne par récurrence.
4. On pose $Z = \dfrac{z'}{z}$, d'où $z' = z \times Z$, et on applique les résultats sur le produit. □

Remarque

Il n'y a pas de formule générale donnant le module d'une somme de deux nombres complexes.
On ne peut rien dire en général sur $\arg(z+z')$.

Conséquence
Si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ sont des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors

1. $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{|d-c|}{|b-a|} = \left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$
2. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Démonstration

1. C'est direct puisque $AB = |b-a|$ et d'après la propriété $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
2. Comme $A \neq B$ et $C \neq D$, l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right)$ est bien défini.

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi] \\
&= \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi] \\
&= \arg(d-c) - \arg(b-a) \quad [2\pi] \\
&= \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

II Notation exponentielle et application

On a vu que pour tous a et b réels, $(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) = \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)$.
En posant $f(x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, on a donc $f(a) \times f(b) = f(a+b)$.
La fonction f possède une propriété de la fonction exponentielle.

Définition
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Remarque
$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ et $\arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \theta \quad [2\pi]$.

Définition
Pour tout nombre complexe z non nul, on appelle notation exponentielle de z toute écriture $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \quad [2\pi]$.

Remarque

1. Comme pour la forme trigonométrique, la notation exponentielle n'est pas unique car $\arg z$ est seulement défini modulo 2π.
2. Pour calculer des sommes de nombres complexes, la forme algébrique ($z = a + \mathrm{i}b$) est la plus appropriée.
   Pour calculer des produits, quotients, puissances de nombres complexes, la forme trigonométrique ou exponentielle est la plus appropriée.

Propriété
Pour tous réels θ et θ',

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.
2. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (formule de Moivre).

Remarque

1. La formule de Moivre s'écrit aussi pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$
2. Pour tout réel θ, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$.
En addtionnant et soustrayant ces égalités, on obtient les formules d'Euler :

Conséquence (formules d'Euler)
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Rappel : triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Par exemple, $\dbinom{4}{2} = 6$, et $\dbinom{6}{3} = 20$.

Remarque
Les coefficient binomiaux interviennent dans la formule qui donne le développement de $(a+b)^n$:
Pour tous complexes a et b, et pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

Exemple :
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exercice 34
Linéariser $\cos^3 x$, en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 35
Linéariser $\sin^3 x$, en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ [1].

Remarque
La notation exponentielle permet de retrouver des formules de trigonométrie.
Sur les formules d'addition par exemple, pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \\
\cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b) &= (\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \\
&= \cos a\cos b + \mathrm{i}\cos a\sin b + \mathrm{i}\sin a\cos b - \sin a\sin b \\
&= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + \mathrm{i}(\sin a\cos b + \sin b\cos a)
\end{aligned}$$

D'où, en identifiant les parties réelles et imaginaires,

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

Remarque
Quelques situations géométriques classiques.
Soient A, B C trois points distincts d'affixes a, b et c respectivement.

1. $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ si et seulement si ($AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$).
   Cela équivaut à dire que le triangle ABC est direct, rectangle isocèle en A.
2. $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ si et seulement si ($AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$).
   Cela équivaut à dire que le triangle ABC est équilatéral direct.

Exercice 36 (lieux géométriques)
Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts. Montrer les assertions suivantes :

1. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$ est la droite (AB) privée du point A.
2. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.
3. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = 1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

1. Réponses : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^3(x) = -\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin x$, puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8-5\sqrt{2}}{12}$.

Chapitre 15

Produit scalaire dans l'espace

I Produit scalaire dans l'espace

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires.

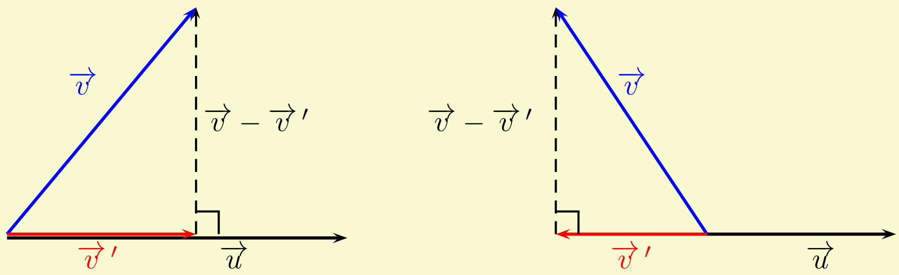
Définition
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ calculé dans un plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Remarque
Cette définition est indépendante du plan choisi et des représentants choisis pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Propriété (Rappels : expressions du produit scalaire)

1. Formule du projeté orthogonal.
   Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls, et $\overrightarrow{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$. Alors,

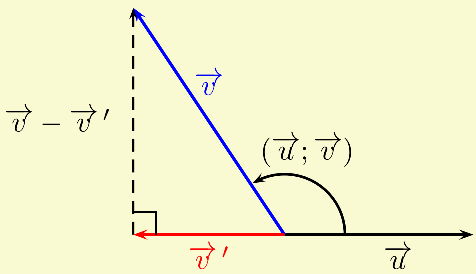
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\,'$$



   Lorsque $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul, on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

2. Formule du cosinus :
   Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$$



3. Expressions avec les normes :
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\Big(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\Big)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\Big(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\Big)$$

Remarque
Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Remarque (cas des vecteurs colinéaires non nuls)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$.
— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$.

Définition
On dit que deux vecteurs sont orthogonaux s'ils dirigent des droites orthogonales.
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriété (Vecteurs orthogonaux)
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Théorème (Expression dans un repère orthonormé)
Soit $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de coordonnées $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Corollaire (Lien entre distance et produit scalaire)

1. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$. D'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
2. Distance entre deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Démonstration
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. □

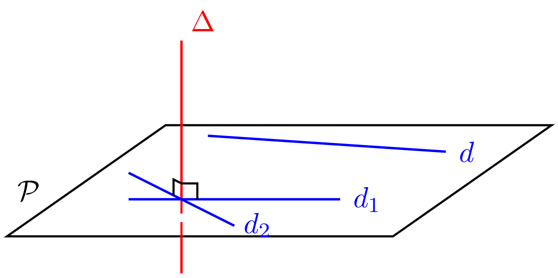
Remarque
L'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ se traduit de façon analytique par :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' + zz' = 0$$

II Applications du produit scalaire

Définition (rappel)
Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Théorème
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



Démonstration (à connaître)
On montre l'équivalence suivante :
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de plan.
La démonstration utilise le produit scalaire.

1. Implication directe :
   Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
   Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, et Δ une droite orthogonale à d_1 et à d_2.
   Considérons des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ de d_1, $\overrightarrow{u_2}$ de d_2 et $\overrightarrow{v}$ de Δ.
   Comme $\Delta \perp d_1$, on a $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$.
   De même, $\Delta \perp d_2$, d'où $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$.
   Comme d_1 et d_2 sont sécantes dans $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Autrement dit $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathcal{P}$ (famille de vecteurs directeurs).
   Soit d une droite quelconque de $\mathcal{P}$, montrons que $\Delta \perp d$.
   Considérons $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de d (donc $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$).
   Comme $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u_1}$ et u_2 sont coplanaires, $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et de $\overrightarrow{u_2}$:
   $$\text{Il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}.$$
   Alors, par linéarité du produit scalaire,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} &= \overrightarrow{v} \cdot (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \\ &= a\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} \\ &= a \times 0 + b \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.
   Comme les doites Δ et d ont des vecteurs directeurs orthogonaux, elles sont orthogonales.
   $\Delta \perp d$.
2. Réciproque :
   Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, alors elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
   Cette réciproque est évidente. □

Définition
Un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est dit normal à un plan s'il dirige une droite orthogonale à ce plan.

Propriété
Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
L'unique plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Démonstration
Soient M un point du plan P et (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
La droite (AM) est alors une droite du plan P.
Comme (d) est orthogonale à toutes les droites du plan P, $(d) \perp (AM)$.
Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
Alors M est confondu avec A ou le droite (AM) est orthogonale à la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$, donc M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. □

Propriété
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ (nécessairement non nul) admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
2. Soient a, b, c, d quatre réels, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.
   Alors $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

Démonstration (à connaître)

1. Soit $A(x_0;y_0;z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
   Alors $\overrightarrow{AM}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, et $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$.
   $$\begin{aligned} M\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\\ &\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\\ &\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0\end{aligned}$$
   En posant $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, le plan $\mathcal{P}$ est caractérisé par l'équation $ax+by+cz+d=0$.
2. Réciproquement, on considère l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.
   Comme a, b et c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que $a\neq0$.
   Il est clair que le point $A\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ appartient à (E) (donc (E) est non vide).
   L'équation de (E) $ax+by+cz+d=0$ équivaut à $a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz=0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$ où $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.
   Donc l'ensemble (E) est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$. $\square$

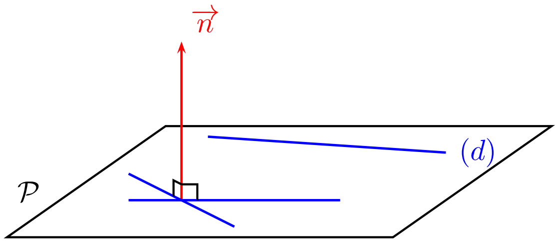
Remarque
Le plans (xOy), (yOz) et (xOz) ont respectivement pour équation $z=0$, $x=0$ et $y=0$.

III Intersections de droites et de plans

III.1 Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété
Soient (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.
   Alors,
   — si $A\in\mathcal{P}$, (d) est incluse dans $\mathcal{P}$;
   — si $A\notin\mathcal{P}$, (d) et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.
2. (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux.
   En particulier, $d\perp\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.



III.2 Intersection de deux plans

Propriété
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.
Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

Remarque
Lorsque deux plans de l'espace ne sont pas parallèles, ils sont sécants et leur intersection est une droite.

Conséquence
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

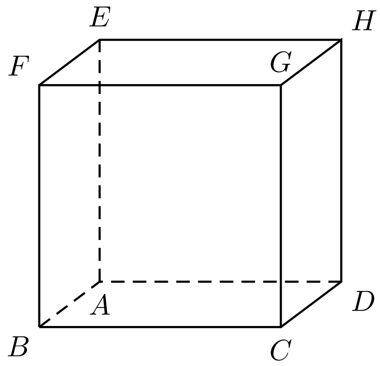
1. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ sont proportionnels.
2. Si $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ ne sont pas proportionnels, alors l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est une droite (intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$).

III.3 Plans perpendiculaires

Définition
Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Propriété
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.
Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Exercice 37
Soit un cube $ABCDEFGH$.



1. Citer deux plans perpendiculaires. Justifier.
2. Citer deux plans qui ne sont pas perpendiculaires. Justifier.

Chapitre 16

Lois normales

I Introduction : le théorème de Moivre-Laplace

Rappel :
Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, alors $E(X) = np$, et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)
Soit $p \in]0;1[$. On suppose que pour tout entier non nul n, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Soit Z_n la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t.$$

Remarque

- La démonstration est admise.
- Ce théorème a un rôle fondamental : il permet, lorsque le nombre d'épreuves est assez grand, d'approcher une loi binomiale par une loi normale.

Exercice 38
Cet exercice revient sur une propriété vue en première.
Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance μ et décart-type σ.
Soient a et b des nombres réels, on considère la variable aléatoire $Y = aX + b$.

1. Montrer que $E(Y) = a \times E(X) + b = a\mu + b$.
2. Montrer que $V(Y) = a^2V(X) = a^2\sigma^2$.

On dit que l'espérance est linéaire.
La variance est invariante par translation $V(Y + b) = V(Y)$, et quadratique $V(aY) = a^2V(Y)$.

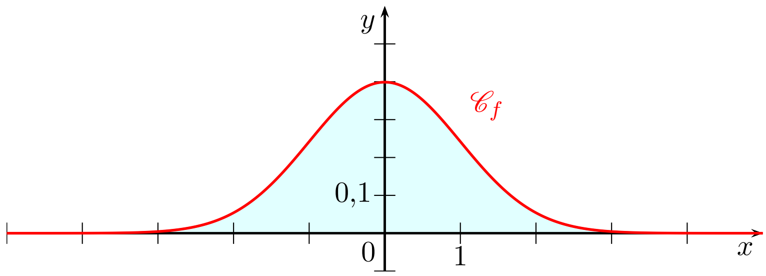
Exercice 39
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, on a $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
On pose $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

1. Déterminer $E(Z)$.
2. Déterminer $\sigma(Z)$.

II La loi normale centrée réduite

II.1 Définition

> **Définition**
> La loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ est la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

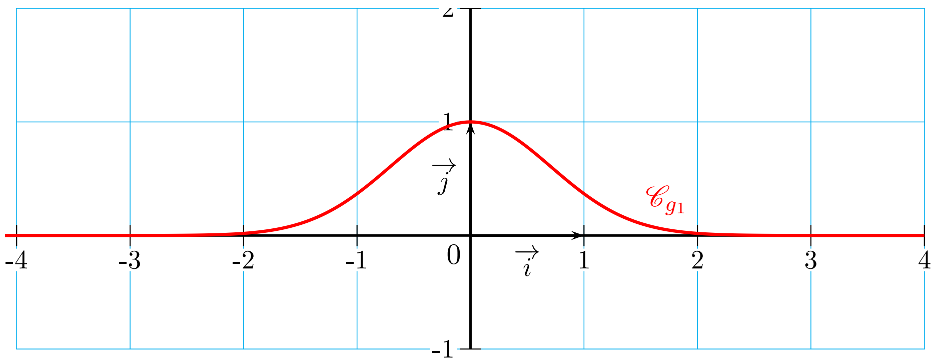


Remarque

1. f est bien une fonction de densité :
   — il est clair que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
   — on admet que l'aire sous la courbe est 1 : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
2. $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$.
3. on a étudié les fonctions $g_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$, avec $k > 0$ à la fin du chapitre sur la fonction exponentielle.
   On a montré que $g'_k(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx^2}$, est du signe de $(-x)$.
   $g_k(0) = 1$, l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$, et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

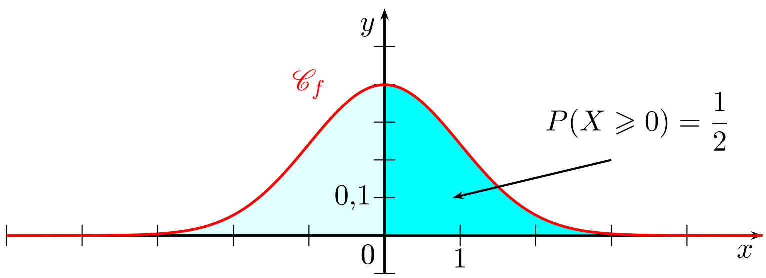
Courbe repésentative pour $k = 1$. $g_1(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.



II.2 Propriétés de la loi normale centrée réduite

Propriété

1. f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tous réels a et b, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'aire totale sous la courbe est 1. Elle représente $P(X \in]-\infty; +\infty[)$.
4. La fonction f est paire, donc la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   Par conséquent, $P(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.
5. Pour tout nombre réel a,
   (a) $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$ (symétrie)
   (b) $P(X \leqslant -a) = 1 - P(X \leqslant a)$



Remarque

1. La courbe de f est appelée courbe de Gauss (courbe en cloche).
2. Son maximum est atteint en 0.
3. Comme elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on a $P(X \geqslant 0) = P(X \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.

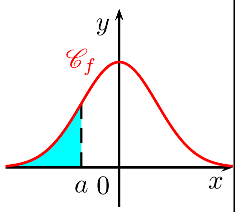
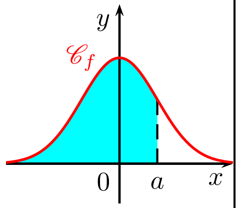
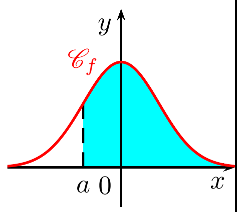
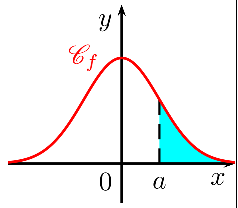
Remarque (utilisation de la calculatrice)
Les calculatrices proposent une instruction pour calculer $P(a < X < b)$.

	Casio	Texas
Syntaxe	*Optn*, *STAT* (F5), *DIST* (F3), *NORM* (F1)	*Distrib* (2nde *var*)
$P(a < X < b)$	choisir *Ncd* : `NormCD(a,b)`	`normalFRep(a,b)` ou `normalCD(a,b)`
Nombre réel k tel que $P(X < k) = c$	choisir *InvN* : `InvNormCD(c)`	`FracNormale(c)`

Exemple :
Soit X une variable suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
$P(-1 < X < 0,2) \approx 0,42$.

Remarque
Les commandes **`normalpdf`** (ou **`normalFdp`** version française) pour Texas, ou **`Npd`** pour Casio), permettent d'obtenir les valeurs prises par la fonction densité $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
Par exemple, normalFdp(0) calcule $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$.

Application aux calculs de probabilités du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$.

Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < 0$	$P(X < a)$ pour $a > 0$	$P(X > a)$ pour $a < 0$	$P(X > a)$ pour $a > 0$
Graphique				
Calcul	$\frac{1}{2} - P(a < X < 0)$	$\frac{1}{2} + P(0 < X < a)$	$P(a < X < 0) + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - P(0 < X < a)$

Exemple :
Dans le cas du calcul de $P(X > a)$ avec $a > 0$, on a

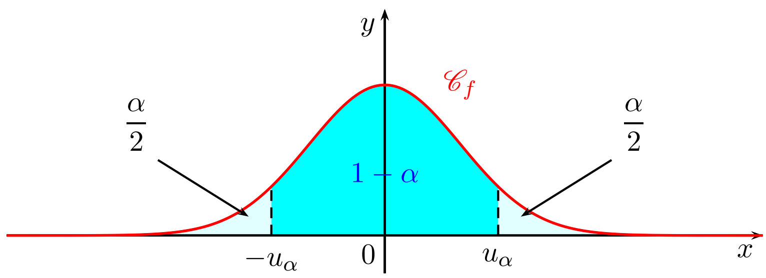
$$P(0 < X < a) + P(X > a) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$$

D'où $P(X > a) = \dfrac{1}{2} - P(0 < X < a)$.

Propriété
Posons $\Phi(t) = P(X \leqslant t)$. On dit que Φ est la fonction de répartition associée à la loi de X suivant la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$.
Alors, pour tout réel a,

1. $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.
2. $P(-a < X < a) = 2\Phi(a) - 1$.
3. La fonction Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème
Si X suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$, alors pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



Démonstration (à connaître)
Soit $u \geqslant 0$.

Par symétrie de la courbe de f, on a $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x = 2G(u)$ où G est la primitive de f qui s'annule en 0 (comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives).
G est continue et strictement croissante ($G' = f > 0$) sur $[0; +\infty[$.
En outre, $\lim\limits_{u \to +\infty} G(u) = \dfrac{1}{2}$ car cela correspond à l'aire sous la courbe de f sur $[0; +\infty[$.
La fonction $2G$ est donc continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ avec le tableau de variation suivant :

u	0		$+\infty$
$2G$			1
		$\nearrow$	
	0		

Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, on a $1 - \alpha \in]0; 1[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique $u_\alpha > 0$ tel que $2G(u_\alpha) = 1 - \alpha$.
Conclusion :
Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$. $\square$

Propriété

1. Une valeur approchée de $u_{0,05}$ est 1,96.
2. Une valeur approchée de $u_{0,01}$ est 2,58.

Remarque
Interprétation : si X suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, alors

1. $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$.
2. $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$.

Propriété
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 0 et son écart-type est de 1.

Démonstration

1. Espérance.

   La fonction densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

   Donc $g(t) = tf(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

   La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

   On veut montrer que $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$, soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

   Pour passer à la limite sur les bornes d'intégration, on montre que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

   Pour tout $a < 0$, $\displaystyle\int_a^0 tf(t)\,\mathrm{d}t = G(0) - G(a)$.

   Or, $\lim\limits_{a \to -\infty} G(a) = 0$ (par composée et produit).

Donc $\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 tf(t)\,\mathrm{d}t = G(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, pour tout $b > 0$, $\int_0^b tf(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(0)$.

Comme $\lim_{b \to +\infty} G(b) = 0$, $\lim_{b \to +\infty} \int_0^b tf(t)\,\mathrm{d}t = -G(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 tf(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. On admet le résultat sur l'écart-type. □

III Lois normales

Définition
Soient μ un nombre réel et $\sigma > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si et seulement si la variable $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Propriété
Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors son espérance est μ et son écart-type est σ.

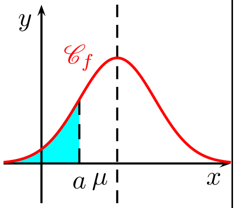
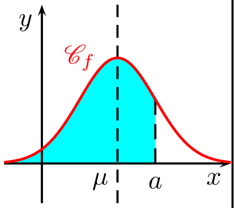
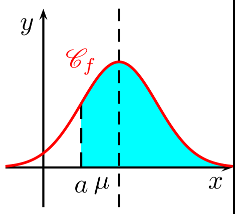
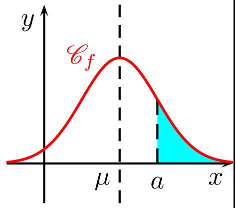
Remarque

1. Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, μ est aussi la médiane car $P(X < \mu) = 0,5$ (et $P(X > \mu) = 0,5$).
2. Soit f la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.
   La courbe représentative de f est une courbe en cloche symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, d'autant plus resserrée autour de son axe de symétrie que σ est petit.

Utilisation de la calculatrice

	Casio	Texas
Syntaxe	*Optn*, *STAT* (F5), *DIST* (F3), *NORM* (F1)	*Distrib* (2nde *var*)
$P(a < X < b)$	choisir *Ncd* : `NormCD(a,b,`σ`,`μ`)`	`normalFRep(a,b,`μ`,`σ`)`
Nombre réel k tel que $P(X < k) = c$	choisir *InvN* : `InvNormCD(c,`σ`,`μ`)`	`FracNormale(c,`μ`,`σ`)`

Comme pour la loi normale centrée réduite, on peut alors déterminer n'importe qu'elle probabilité du type $P(X > a)$ ou $P(X < a)$.
On utilise là aussi la symétrie de la courbe : $P(X > \mu) = P(X < \mu) = \frac{1}{2}$.

Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < \mu$	$P(X < a)$ pour $a > \mu$	$P(X > a)$ pour $a < \mu$	$P(X > a)$ pour $a > \mu$
Graphique	 $a < \mu$	 $a > \mu$	 $a < \mu$	 $a > \mu$
Calcul	$\frac{1}{2} - P(a < X < \mu)$	$\frac{1}{2} + P(\mu < X < a)$	$P(a < X < \mu) + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - P(\mu < X < a)$

Propriété

1. $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.
2. $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.
3. $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Démonstration
Les trois cas se montrent de la même manière. Montrons le dernier cas.

$$\begin{array}{ll} & \mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma \\ \Leftrightarrow & -3\sigma \leqslant X - \mu \leqslant 3\sigma \\ \Leftrightarrow & -3 \leqslant \dfrac{X - \mu}{\sigma} \leqslant 3 \end{array}$$

Donc $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = P(-3 \leqslant Y \leqslant 3)$ où Y suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$.
Ainsi, en posant $\Phi(t) = P(Y \leqslant t)$,

$$\begin{array}{rcl} P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) & = & P(-3 \leqslant Y \leqslant 3) \\ & = & 2\Phi(3) - 1 \\ & \approx & 0,997 \end{array}$$

à la calculatrice, $\Phi(3) = P(Y \leqslant 3) = \frac{1}{2} + P(0 < Y < 3)$. □

Chapitre 17

Échantillonnage et simulation

I Rappels des années précédentes

I.1 Notion d'intervalle de fluctuation d'une fréquence

On nomme p la proportion d'un caractre dans une population.
Soit n un entier strictement positif.
Soit X_n la variable alatoire qui chaque chantillon de taille n prlev dans cette population associe le nombre d'individus possdant le caractre tudi.
La variable alatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; p)$.
La variable alatoire frquence associe est $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

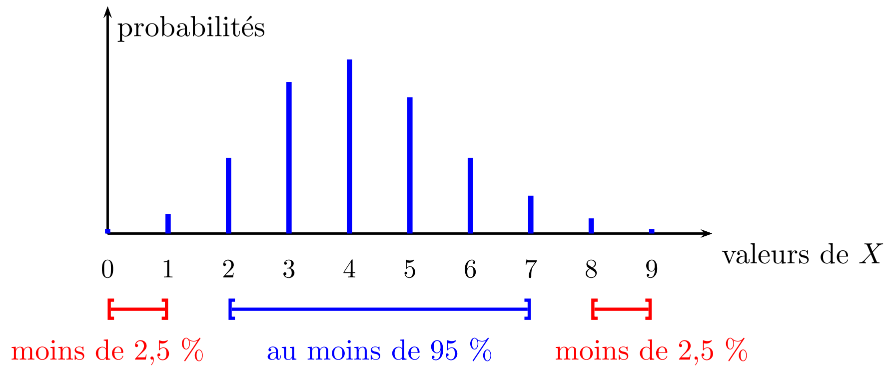
Définition
Soit α un rel de $]0; 1[$.
Tout intervalle I tel que $P(F_n \in I) \geqslant 1 - \alpha$ est un **intervalle de fluctuation de la frquence F_n au seuil de $1 - \alpha$**.

Cas $\alpha = 0,05$:
Dire qu'un intervalle I est un intervalle de fluctuation de la frquence F_n au seuil de _____ % signifie que :
....

I.2 Intervalle de fluctuation vu en seconde

Propriété (intervalle de fluctuation d'une fréquence)
Soit un caractère dont la proportion dans une population donnée est p.
Lorsque $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, au moins 95 % des échantillons de taille n issus de cette population sont tels que la fréquence f du caractère dans l'échantillon appartient à l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
L'intervalle $I = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

I.3 Intervalle de fluctuation associé à la loi binomiale, $1^{\text{ère}}$ S



Définition
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
On note f la fréquence associée à un échantillon aléatoire de taille n de X.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence f est lintervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, défini par :
- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$,
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Remarque
1. On a donc $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$.
2. Comme les valeurs prises par X sont des nombres entiers (X suit $\mathcal{B}(n;p)$, donc les valeurs de X vont de 0 à n), on a aussi :
   - a est le plus grand entier tel que $P(X < a) \leqslant 0,025$,
   - b est le plus petit entier tel que $P(X > b) \leqslant 0,025$

   On peut noter par exemple que $P(X \leqslant a) = P(X < a+1)$.
3. Cet intervalle de fluctuation s'applique à des échantillons de variables aléatoires suivant une loi binomiale, et ce quelles que soient les valeurs de n et p, contrairement à l'intervalle de fluctuation vu en seconde.
4. L'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ n'est pas nécessairement centré sur p.

   Il n'y a pas de formule donnant directement les bornes $\frac{a}{n}$ et $\frac{b}{n}$.

Exercice 40
Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.
1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est $0,52$. Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.
2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

k	$P(X \leqslant k) \approx$
40	0,0106
41	0,0177
42	0,0286
43	0,0444
...	...
61	0,9719
62	0,9827
63	0,9897
64	0,9897

Déterminer a et b tels que :
a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

3. En déduire l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ au seuil de 95 % pour une fréquence f de personnes lui faisant confiance.
4. Comparer cet intervalle à l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu en seconde.
5. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 95 %, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

Exercice 41 (sécurité au carrefour)
Un groupe de citoyens demande à la municipalité dune ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent en utilisant une mauvaise file.
Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. Déterminer, en utilisant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = 0,4$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
2. D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ?

Éléments de réponse
1. $I = [0,358; 0,444]$.
2. $f = 0,38$. $f \in I$. On ne peut pas rejeter l'affirmation.

II Théorème de Moivre-Laplace

Rappel :
Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; p)$, alors $E(X) = np$, et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)
Soit $p \in]0;1[$. On suppose que pour tout entier non nul n, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Soit Z_n la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x.$$

III Intervalle de fluctuation asymptotique

Rappel (relatif à la loi normal centrée réduite) :
Si X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. On note F_n la variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ correspondant à la fréquence de succés dans la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.

Propriété
Si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors, pour tout $\alpha \in]0;1[$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$ où I_n est l'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Démonstration (à connaître)

$$\begin{aligned}
\frac{X_n}{n} \in I_n \quad & \Leftrightarrow \quad p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\
& \Leftrightarrow \quad np - u_\alpha \frac{n\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha \frac{n\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\
& \Leftrightarrow \quad np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \\
& \Leftrightarrow \quad -u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha
\end{aligned}$$

en posant $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
D'après le théorème de Moivre-Laplace, $P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha)$ tend vers $\displaystyle\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = \int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$.
Or, cette dernière intégrale est égale à $P(-u_\alpha \leqslant Y \leqslant u_\alpha)$ où Y est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Comme $P(-u_\alpha \leqslant Y \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ (par définition de u_α), on a montré que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha. \qquad \square$$

Définition
On dit que l'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $1-\alpha$ de la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Remarque

1. Cet intervalle contient les fréquences $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec une probabilité qui tend vers $1-\alpha$ lorsque n tends vers l'infini.
2. Il est toujours centré sur p.
3. On admet que pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut approcher $P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$ par $1-\alpha$.

   On convient donc d'utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque les conditions suivantes sont remplies :
   - $n \geqslant 30$,
   - $np \geqslant 5$,
   - $n(1-p) \geqslant 5$.

Dans le cas où $\alpha = 0,05$, $1-\alpha = 0,95$ et on a vu que $u_\alpha \approx 1,96$. On en déduit un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Propriété
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

III.1 Détermination pratique de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

— Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, alors on utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

— Sinon, on utilise l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ vu en première, où :
- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$,
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

III.2 Autres seuils possibles

1. Intervalle de fluctuation au seuil de 99 % (avec un risque de 1%).
   $u_{0,01} \approx 2,58$, ce qui donne l'intervalle

$$I_n = \left[p - 2,58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2,58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

2. Cas général : intervalle de fluctuation au seuil $1-\alpha$ (risque α) :

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où u_α est tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ avec X suivant $\mathcal{N}(0;1)$.

IV Prise de décision à partir d'un échantillon

Théorème (prise de décision)
On fait une hypothèse sur la valeur de p (proportion d'un caractère dans la population). On calcule la frquence observe f du caractre tudi dans un chantillon de taille n. Aprs s'tre assur des conditions d'approximation lies l'intervalle de fluctuation asymptotique, on dtermine celui-ci.

— Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors on rejette l'hypothèse faite sur p, avec un risque de 5 % (de rejeter à tort une hypothèse vraie).

— si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique, alors on ne peut pas rejeter l'hypothèse faite sur p (éviter de dire qu'on l'accepte).

Remarque

1. Dans le cas où $f \in I_n$, le risque d'erreur n'est pas quantifié.
2. le risque de 5% signifie que la probabilit que l'on rejette tort l'hypothse faite sur la proportion p alors qu'elle est vraie est **approximativement** gale 5%. C'est une probabilit conditionnelle.

V Intervalle de fluctuation simplifié

Propriété
Soit $p \in]0;1[$.
Soit, pour tout entier $n > 0$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
Alors, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

Démonstration
Soit p un nombre rel de $]0;1[$.
Soit, pour tout n entier strictement positif, une variable alatoire X_n suivant une loi binomiale de paramtres n et p.
Posons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, Z_n la variable alatoire centre rduite associe X_n.

Rappel : $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Posons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

1. Soit (a_n) la suite dfinie par, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$.
   (a) Dmontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = P(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2)$.
   (b) Dmontrer que la suite (a_n) est convergente et que sa limite ℓ vrifie : $\ell \approx 0,954$ 10^{-3} prs par dfaut.
   (c) Justifier qu'il existe un entier strictement positif n_0 tel que, si l'entier n vrifie $n \geqslant n_0$, alors $a_n \geqslant 0,95$.
2. (a) Dterminer le maximum de la fonction g dfinie sur $[0;1]$ par $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier strictement positif n, $I_n \subset J_n$.
3. Conclure.

□

VI Estimation d'une proportion

La proportion p de caractère dans la population est inconnue.
On essaie d'**estimer** p partir de la frquence d'un chantillon.

Propriété
Soit p un nombre rel de $]0;1[$.
Soit, pour tout n entier strictement positif, une variable alatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
Il existe un entier strictement positif n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95.$$

Démonstration
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et d'après la propriété précédente, pour n assez grand,

$$P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0,95.$$

Or,

$$\begin{aligned} F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] & \Leftrightarrow \quad p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & \Leftrightarrow \quad F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Donc, pour n assez grand, $P\left(F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$. □

Définition
Soit f la fréquence d'un caractère observée sur un échantillon de taille n d'une population dans laquelle la proportion du caractère est p.
Alors l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de la proportion p au seuil de 95 %.

Remarque
On utilise cet intervalle dès que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$.

Deuxième partie

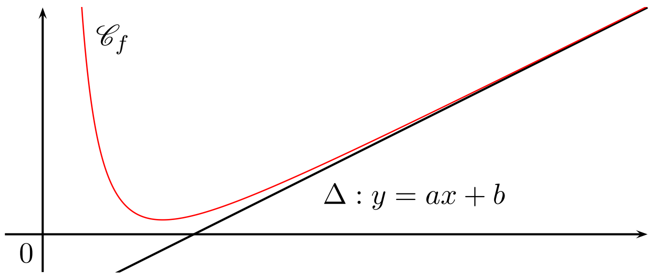
Compléments

Chapitre 18

Limites et comportement asymptotique

I Asymptote oblique

Dans certains cas, lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, il semble que la courbe de f se rapproche de la courbe d'une fonction affine.



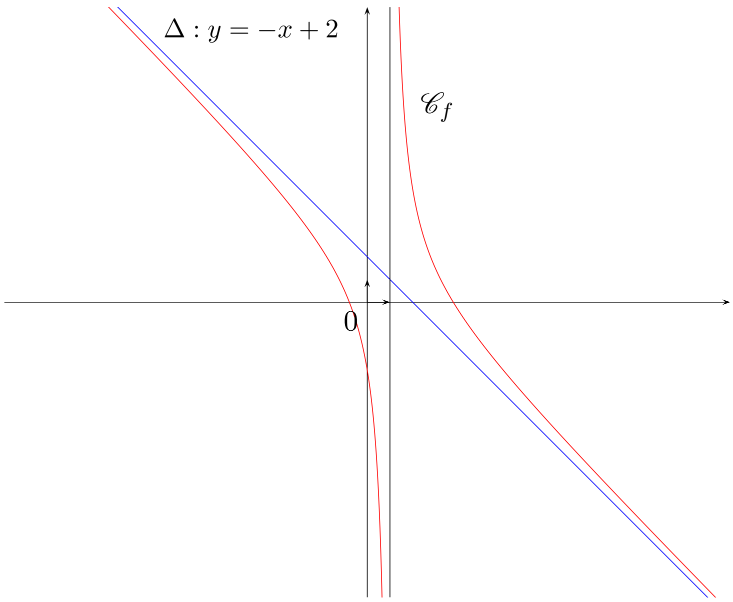
Définition
Soient f une fonction et a et b deux réels. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
On a une définition analogue pour une asymptote en $-\infty$.
Lorsque $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$, f admet une limite infinie en $+\infty$.

Remarque
Le signe de $f(x) - (ax + b)$ détermine la position de la courbe de f par rapport à Δ :

1. Lorsque $f(x) - (ax + b) > 0$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ.
2. Lorsque $f(x) - (ax + b) < 0$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de Δ.

Exemple : $f(x) = -x + 2 + \dfrac{5}{x-1}$.
$f(x) - (-x + 2) = \dfrac{5}{x-1}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0$ la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
D'ailleurs, on a également $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0$, et cette même droite Δ d'équation $y = -x+2$

est aussi asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
Étudions la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
$f(x) - (-x+2) = \dfrac{5}{x-1}$.
$f(x) - (-x+2) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Donc sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ, et sur $]-\infty;1[$ $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de Δ.



On remarque par ailleurs que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

II Plan d'étude de fonctions

Pour étudier une fonction f on procède comme suit :

1. On détermine le domaine de définition de f.
2. On étudie la dérivabilité de f.
   On calcule la dérivée de f, qu'on cherche à obtenir sous forme factorisée afin d'étudier son signe.
3. On étudie le signe de f'.
4. On détermine les limites de f aux bords de son domaine de définition et les valeurs clés qui doivent apparaître dans le tableau de variation de f.
5. On dresse le tableau de variation de f, en complétant toutes les informations possibles : limites, extrema locaux, valeurs interdites éventuelles ...
   Remarque : on ne met dans le tableau que des valeurs exactes, pas de valeurs approchées.
6. On cherche quelques points faciles à construire (si possible), on montre parfois l'existence d'un centre ou d'un axe de symétrie.
7. On cherche d'éventuelles asymptotes à la courbe de f.
8. On trace la courbe de f, en commençant par les points clés, les tangentes horizontales, et les asymptotes.

III Exercice corrigé : étude d'une fonction

Enoncé

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Rechercher des réels a, b, et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
3. Calculer la dérivée de f, et étudier son signe.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Étudier les branches infinies de f, c'est-à-dire rechercher les asymptotes. On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes obliques.
7. Représenter graphiquement la courbe de f le plus prcisément possible.

Correction

1. On divise par $x-1$, on a donc un problème de définition lorsque $x - 1 = 0$ soit $x = 1$.
   $\boxed{D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[.}$
2. La méthode consiste à tout mettre au même dénominateur puis à identifier les coefficients des polynômes aux numérateurs :
   $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
   $f(x) = \dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$
   $f(x) = \dfrac{ax^2 + (b-a)x + (c-b)}{x-1}$
   Par ailleurs, l'énoncé donne $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
   Par identification des coefficients, on obtient $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$
   $\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \neq 1,\ f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}.}$
3. On commence par justifier que f est dérivable pour tout $x \neq 1$:
   Les fonction $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x - 1$ sont des polynômes, donc dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Comme pour tout $x \neq 1$, $x - 1 \neq 0$, f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
   Pour dériver f, on peut partir de l'expression de départ ou de celle du 2.
   Pour tout $x \neq 1$,
   $$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$
   Une fois l'expression de $f'(x)$ factorisée, il est aisé de trouver son signe. Comme le dénominateur est toujours positif (un carré), le signe de $f'(x)$ est le signe de

$x(x-2)$, qui est positif l'extérieur des racines (0 et 2).

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

4. $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. On doit étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On a donc quatre calculs de limite à faire. On exploite le 2. : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

   Limites à l'infini.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.
   Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.
   De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.
   Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   Limites à droite et à gauche de 1.
   $\lim\limits_{x\to1} x + 1 = 2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

   Donc $\lim\limits_{x\to1-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.
   Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to1-} f(x) = -\infty}$.
   De mme, $\lim\limits_{x\to1+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, et l'on a toujours $\lim\limits_{x\to1} x + 1 = 2$.
   Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to1+} f(x) = +\infty}$.
5. Il est nécessaire pour remplir complètement le tableau de variation de f de calculer quelques images :
   $f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{2^2}{2-1} = \dfrac{4}{1} = 4$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0		‖ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ ‖	$\searrow$	4	$\nearrow$	

6. On a vu que f admet des limites infinies à droite et gauche de 1.
   $\boxed{\text{Donc la droite } \Delta \text{ d'équation } x = 1 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f.}$
   Par ailleurs, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, et il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

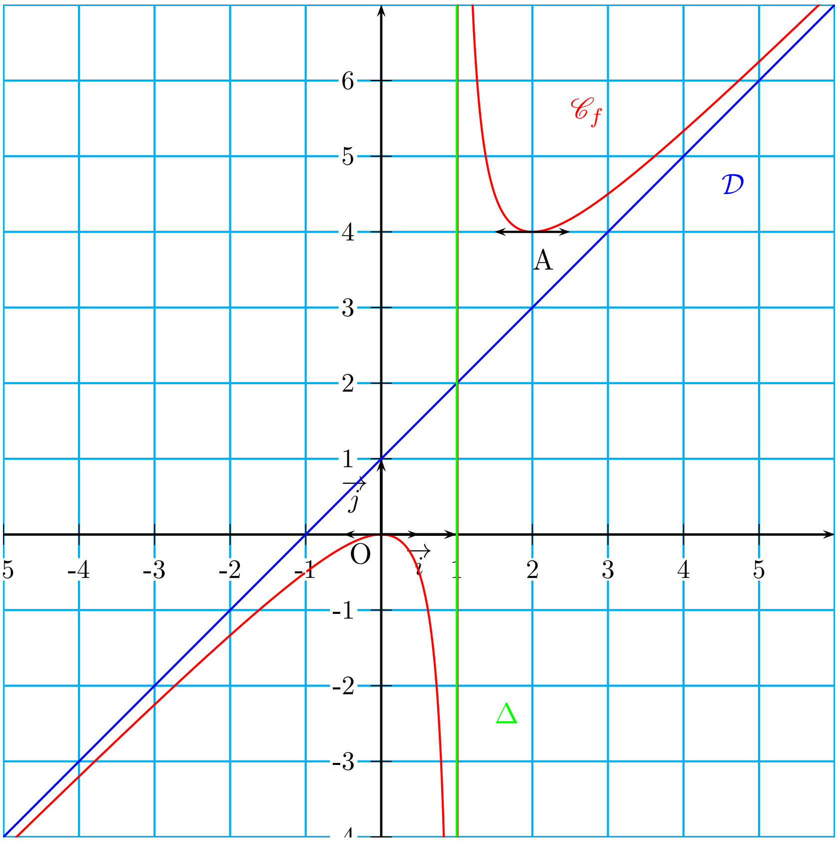
$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } y = x+1 \text{ est asymptote oblique à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty.}$

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ et donc $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ est aussi asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } -\infty.}$

De plus, $\dfrac{1}{x-1}$ est du signe de $x-1$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } x > 1,\ \dfrac{1}{x-1} > 0. \text{ Donc } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{D} \text{ sur }]1;+\infty[. \\ \text{Si } x < 1,\ \dfrac{1}{x-1} < 0. \text{ Donc } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \mathcal{D} \text{ sur }]-\infty;1[. \end{array}}$$

7. Le tracé. On construit $\mathcal{D}$ et Δ, on place les points remarquables du tableau de variation :
   la courbe admet une tangente horizontale en $O(0;0)$ et en $A(2;4)$.



IV Définitions d'une limite

Soit f une fonction définie sur I.

Définition
Limite réelle en $+\infty$
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [k; +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Limite infinie en $+\infty$
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [k; +\infty[$.
On dit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque :

$$\text{Pour tout } M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ x > A \Rightarrow f(x) > M.$$

Limite réelle en un réel a
Soit f une fonction définie sur un voisinage de a (intervalle contenant a ou de la forme $]c; a[\cup]a; b[$). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Limite infinie en un réel a
Soit f une fonction définie sur un voisinage de a de la forme $]c; a[\cup]a; b[$.
On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque :

$$\text{Pour tout } M > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > M.$$

Rappels :
— $\forall$ signifie « pour tout »
— $\exists$ signifie « il existe »
— $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ signifie que l'écart entre $f(x)$ et ℓ est strictement inférieur à ε.
Autrement dit, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.
Pour $\varepsilon > 0$ très proche de 0, cela signifie que $f(x)$ est très proche de ℓ.

Chapitre 19

Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

I Définition

Définition
Soit a un nombre strictement positif et différent de 1.
La fonction $x \mapsto a^x$, dite exponentielle de base a est définie sur $\mathbb{R}$ par :

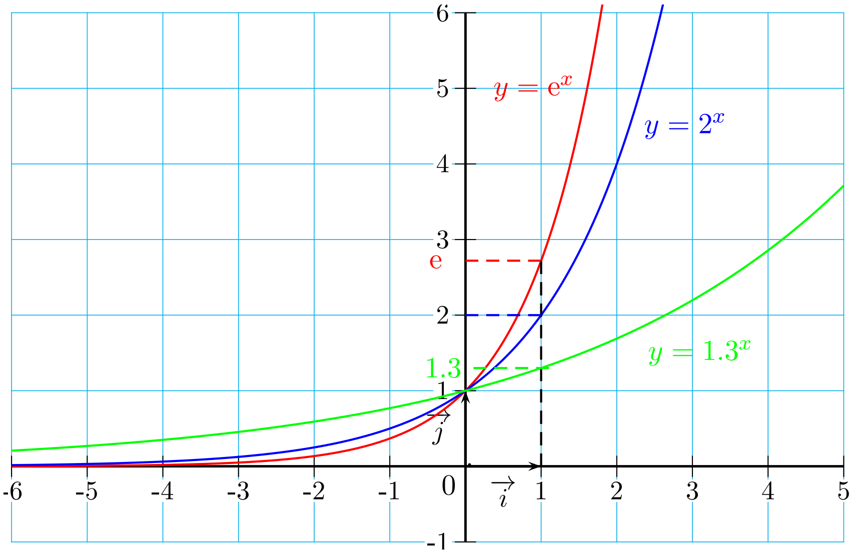
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

Remarque

1. $a^0 = 0$, et $a^1 = a$.
2. Les règles de calcul habituelles sur les puissances s'appliquent. ($a^{x+y} = a^x \times a^y$, ...)
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$.

II Fonction $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$

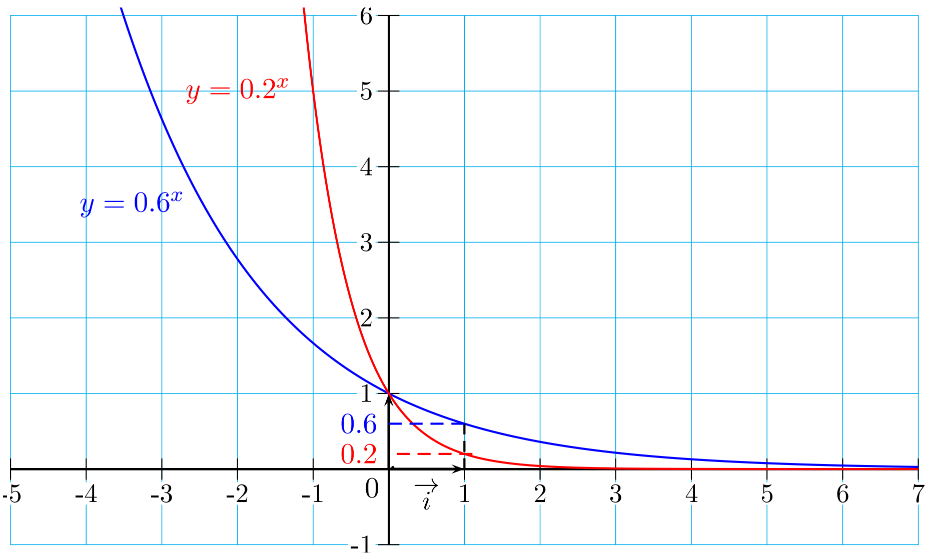
x	$-\infty$		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	$+\infty$



Fonctions exponentielles de base a, $a > 1$.

III Fonction $x \mapsto a^x$ avec $0 < a < 1$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
a^x	$+\infty$ ↘ 0



Fonctions exponentielles de base a, $0 < a < 1$.

IV Exercices sur Euler

— Propriétés de calcul
ressource 1723
— Équations et inéquations
ressource 1887

ressource 1889
ressource 1895
ressource 2921