Chapitre 7 : Vecteurs dans le plan
(Première partie)

I Vecteur et translation

Définition
Soient A et B deux points du plan.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui transforme A en B) est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que les segments $[AM']$ et $[BM]$ aient le même milieu.
Autrement dit, le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

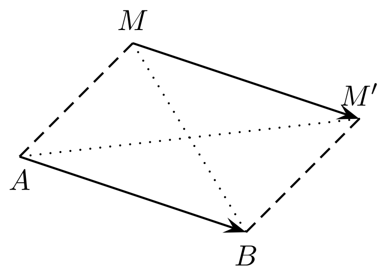
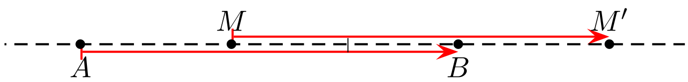
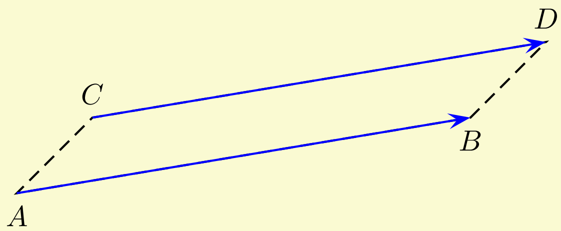


Illustration du cas où $M \in (AB)$:



Définition (Vecteurs égaux)
Soient A, B, C, D quatre points du plan.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque la translation qui envoie A en B envoie aussi C en D.
Lorsqu'il est défini, cela revient à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Lorsque $A \neq B$ et $C \neq D$, on a l'équivalence :

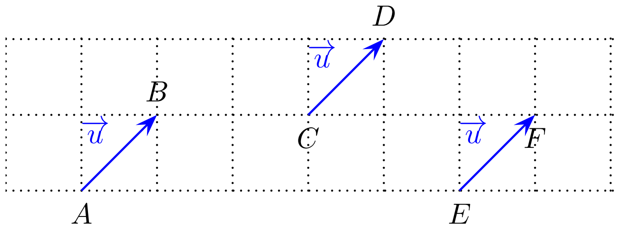
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ si et seulement si } ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

Exercice 1

1. Construire l'image d'un point par une translation transformant un point donné en un autre : ressource 3425
2. Déterminer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme : ressource 482

Remarque

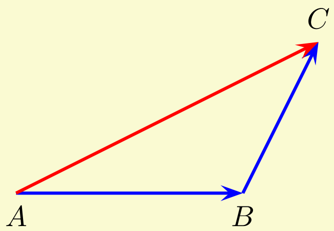
1. On peut représenter un même vecteur n'importe où dans le plan.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on peut dire que ces vecteurs sont des représentants d'un même vecteur $\overrightarrow{u}$.



2. Si $A = B$, (les points A et B sont confondus), la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ laisse chaque point du plan invariant.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, et on note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

II Addition de vecteurs

Théorème (et définition)
Soient A, B et C trois points du plan.
Appliquer successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



On définit l'addition entre les vecteurs par la relation de Chasles :

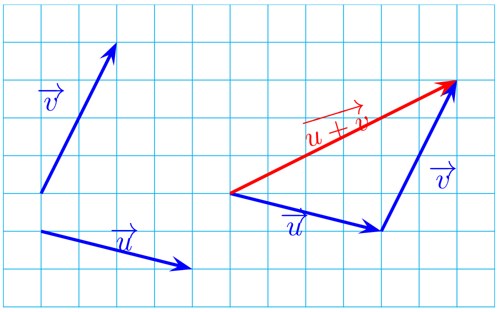
$$\boxed{\text{pour tous points } A, B \text{ et } C \text{ du plan, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Exercice 2
Étudier dans chaque cas si l'on appliquer la relation de Chasles. Si oui, le faire.

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
3. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DA}$

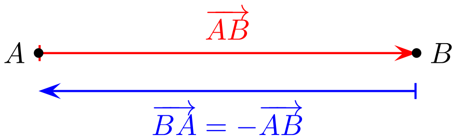
Remarque

1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, on place les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ bout à bout.



2. L'addition sur les vecteurs est commutative.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.
3. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, et on note

$$\boxed{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.}$$



Remarque
On peut caractériser le milieu d'un segment avec des vecteurs :

$$\begin{aligned} I \text{ est le milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \end{aligned}$$

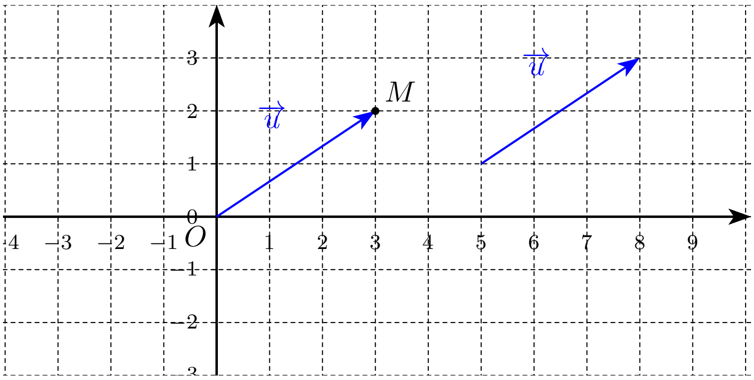
Exercice 3
1. Construire un représentant de la somme de deux vecteurs : ressource 88
2. Construire le représentant de la somme de deux vecteurs donnés d'origine ou d'extrémité fixée : ressource 111
3. Utiliser la relation de Chasles :
   ressource 1748
   ressource 1746
   ressource 1755
4. Représenter la somme de deux vecteurs : ressource 3572 et ressource 3573

III Coordonnées d'un vecteur

III.1 Définition et propriété

Définition
Soient $(O;I;J)$ un repère du plan, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{u}$.

Illustration : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.



Remarque
Les coordonnées d'un vecteur traduisent les variations en abscisses et en ordonnées entre le point de départ et son extrêmité.
On note les coordonnées d'un vecteur en colonne.

Exercice 4

1. Représenter un vecteur de coordonnées fixées : ressource 90
2. Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur : ressource 340
3. Représenter un vecteur de coordonnées et d'origine ou d'extrémité fixées : ressource 3570

Propriété
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors,

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si ($x = x'$ et $y = y'$).
   Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
2. Le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{u+v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Exercice 5

1. Déterminer les coordonnées de la somme de deux vecteurs de coordonnées fixées : ressource 486
2. Déterminer graphiquement les coordonnées de la somme de deux vecteurs : ressource 3568
3. Déterminer les coordonnées manquantes intervenant dans la somme de deux vecteurs : ressource 3574

Exercice 6
Dans un repère du plan, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A(1; -4)$.
Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Exercice 7
Dans un repère du plan, on donne $A(-4; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 2)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Théorème
Dans un repère du plan, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Il suffit de passer aux coordonnées dans cette relation pour obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. $\square$

Exercice 8

1. Calculer les coordonnées d'un vecteur : ressource 130
2. Déterminer les coordonnées d'un des deux points définissant un vecteur de coordonnées fixées : ressource 3567
3. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une translation : ressource 484