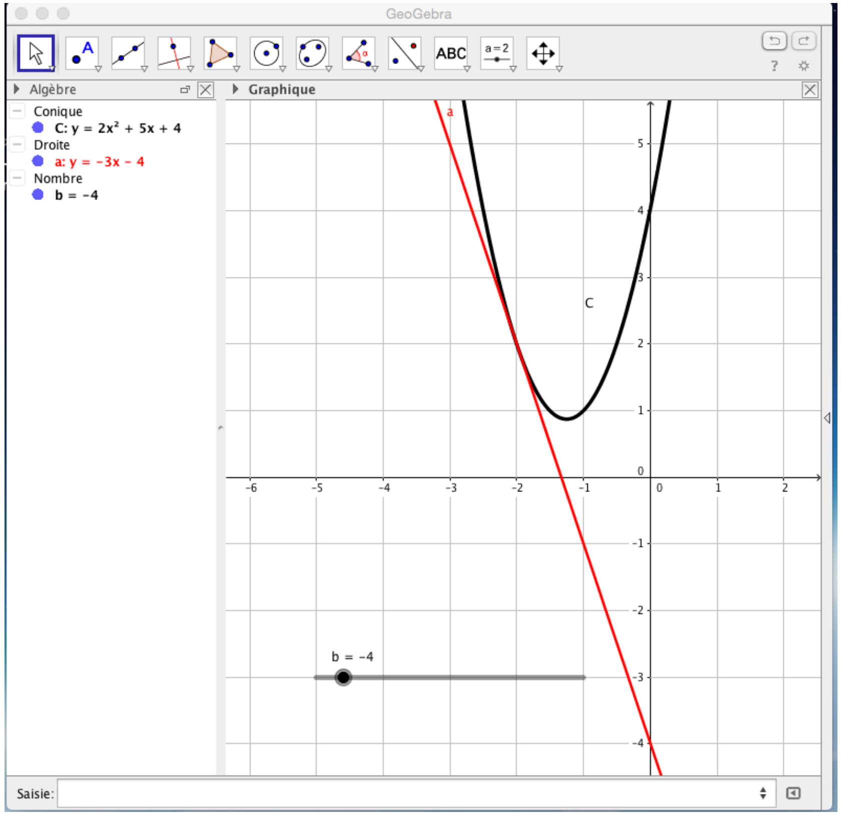
PS. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1 (157 page 27)

On pose $f(x) = 2x^2+5x+4$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Soit b un nombre réel, on note D_b la droite d'équation $y = -3x + b$.

On cherche, suivant les valeurs de b, le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_b.

1. Conjecture à l'aide d'un logiciel.
   Le paramètre b est l'ordonnée à l'origine de la droite, son coefficient directeur est fixé à -3.



Il semble que :
- $\mathscr{C}$ et D_b aient deux points d'intersection lorsque $b > -4$,
- $\mathscr{C}$ et D_b aient un unique point d'intersection lorsque $b = -4$,
- $\mathscr{C}$ et D_b n'aient pas de point d'intersection pour $b < -4$.

2. Il s'agit de discuter, selon les valeurs de b, le nombre de solutions de l'équation $2x^2 + 5x + 4 = -3x + b$ (E).
   Cela revient à $2x^2 + 8x + (4 - b) = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 2 \times (4 - b) = 32 + 8b$.
   Ainsi,
   - $\Delta > 0$ ssi $32 + 8b > 0$, ssi $b > -4$.
   - $\Delta = 0$ ssi $32 + 8b = 0$, ssi $b = -4$.
   - $\Delta < 0$ ssi $32 + 8b < 0$, ssi $b < -4$.

   Conclusion :
   - Si $b > -4$, alors $\Delta > 0$, l'équation (E) a deux solutions, et donc $\mathscr{C}$ et D_b ont deux points d'intersection.
   - Si $b = -4$, alors $\Delta = 0$, l'équation (E) a une seule solution, et $\mathscr{C}$ et D_{-4} ont un unique point en commun (on dit que D_{-4} et $\mathscr{C}$ sont tangentes).
   - Enfin, si $b < -4$, alors $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution, et $\mathscr{C}$ et D_b n'ont aucun point d'intersection.

   La conjecture est démontrée.