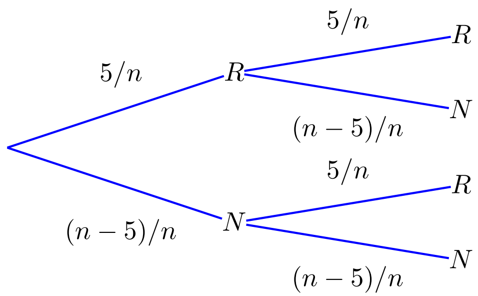
1G. Correction du dm n° 6

Exercice 1

Une urne comprend 5 boules rouges et $n-5$ boules noires, où $n \geqslant 5$.

1. Un joueur tire au hasard, successivement et **avec remise** deux boules de l'urne.

   (a) Soit A l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(A)$ de l'événement A.
   On note R pour désigner "la boule est rouge" et N pour "la boule est noire". ($\overline{R}=N$).



   $p_n(A)=p(R;N)+p(N;R)=2\times\dfrac{5}{n}\times\dfrac{n-5}{n}$

   $p_n(A)=\dfrac{10(n-5)}{n^2}$.

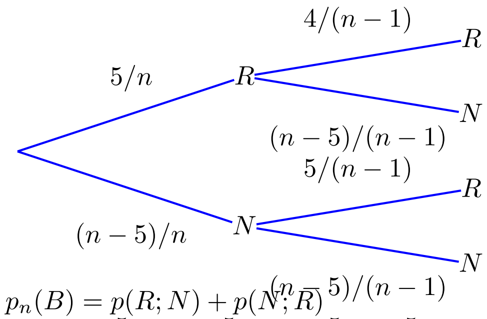
   (b) En étudiant les variations de la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{10(x-5)}{x^2}$, déterminer pour quelles valeurs de n le joueur a le plus de chances de réaliser A.
   Sur $[5;+\infty[$, x^2 ne s'annule pas.
   La fonction f est donc dérivable sur $[5;+\infty[$ par quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \geqslant 5$,
   $f'(x)=10\times\dfrac{x^2-(x-5)\times 2x}{x^4}$
   $f'(x)=10\times\dfrac{-x^2+10x}{x^4}=10\times\dfrac{x(10-x)}{x^4}$.
   $10>0$, et sur $[5;+\infty[$ $x>0$ et $x^4>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $(10-x)$.

x	5		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	

   $f(5)=0$, et $f(10)=\dfrac{10\times 5}{10^2}=\dfrac{1}{2}$.
   On en déduit que la prbabilité $p_n(A)$ est maximale lorsqu'il y a 10 boules dans l'urne (5 rouges et 5 noires).
   Dans ce cas, la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est $p_{10}(A)=\dfrac{1}{2}$.

2. Un joueur tire au hasard, successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.

   (a) On note B l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(B)$ de l'événement B.
   Pour $n=5$, il n'y a que des boules rouges dans l'urne, donc il est impossible de tirer deux boules de couleurs différentes, donc $p_5(B)=0$.
   Pour $n \geqslant 6$, on a l'arbre suivant :



   $p_n(B)=p(R;N)+p(N;R)$
   $p_n(B)=\dfrac{5}{n}\times\dfrac{n-5}{n-1)}+\dfrac{n-5}{n}\times\dfrac{5}{n-1}$
   $p_n(B)=\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$.

   (b) Le joueurs gagne 2 euros s'il réalise B et perd 1 euros dans le cas contraire.
   Soit X le gain algébrique du joueur. Montrer que $E(X)=\dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$.
   Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.
   La loi de probabilité de X est résumée par le tableau :

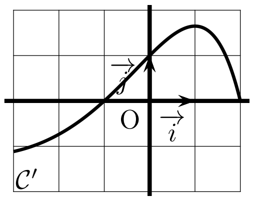
x_i	2	-1
$p(X=x_i)$	$\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$	$1-\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \Sigma x_i \times p_i \\ &= 2\times\frac{10(n-5)}{n(n-1)}-1\times\left(1-\frac{10(n-5)}{n(n-1)}\right) \\ &= 3\times\frac{10(n-5)}{n(n-1)}-1 \\ &= \frac{30(n-5)-n(n-1)}{(n(n-1)} \\ &= \frac{-n^2+31n-150}{n^2-n} \end{aligned}$$

   Le jeu est équitable ssi $E(x)=0$
   ssi $-n^2+31n-150=0$.
   On résout l'équation du second degré $-x^2+31x-150=0$.
   $\Delta=b^2-4ac=31^2-4\times150=361=19^2>0$.
   $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=25$.
   $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=6$.
   On obtient deux solutions entières et supérieures ou égales à 6 (on garde les deux).
   Le jeu est équitable pour $n=6$ (5 rouges, 1 noire) et pour $n=25$ (5 rouges, 20 noires).

Exercice 2

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.



On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée** f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
   Sur l'intervalle $[-3, -1]$, les points de la courbe ont une ordonnée négative ou nulle. VRAI.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
   Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on lit que $f'(x) \geqslant 0$, donc que f est croissante sur cet intervalle. VRAI.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
   Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0]$. Or on sait que $f(0) = -1$.
   D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les réels de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1. FAUX.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.
   Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation
   $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = x - 1$.
   Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ car ces coordonnées vérifient l'équation de la tangente. VRAI.

Exercice 3 (TP1 page 327 - le lièvre et la tortue)

A – Expérimentation

1. (a) La variable `d` correspond au résultat du lancer du dé. La variable `n` correspond au nombre de lancers du dé dans la partie.
   (b) Cette fonction renvoie une liste de deux nombres.
   Le premier est le nombre total de lancers effectués dans la partie.
   Le second est soit 0 soit 1 : 0 signifie que la tortue a gagné (pas de 6 lors d'une répétition de 6 lancers), et 1 signifie que le lièvre a gagné (un 6 est sorti durant les 6 premiers lancers).
2. Fonction `replievre(n)`

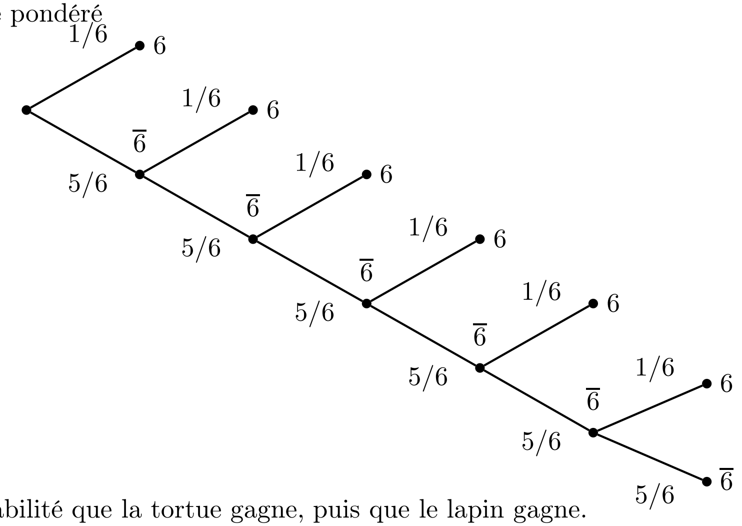
```
def replievre(n):
  A=0
  B=0
  for i in range(n):
     L=lievre()
     A=A+L[1]
     B=B+L[0]
  return(A/n,B/n)
```

Pour $n = 500\,000$, on obtient sur un exemple $(0.665262, 3.989332)$, ce qui signifie que sur une simulation de $500\,000$ parties, la fréquence des parties gagnées par le lapin est 0,665262, et qu'il y a environ 4 lancers en moyenne par partie.

B – Étude théorique

Soit X la variable donnant le nombre de pas pour arriver au but.

1. Arbre pondéré



2. Probabilité que la tortue gagne, puis que le lapin gagne.
   Notons p la probabilité que la tortue gagne.
   $p = \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 = \dfrac{15625}{46656} \approx 0,3349$.
   Alors la probabilité que la lapin gagne est $1 - p$.
   $1 - p = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 = \dfrac{31031}{46656} \approx 0,6651$.
3. Loi de X.
   X désigne le nombre de pas pour arriver au but (nombre de lancers).
   Les valeurs possibles de X sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6.
   $P(X = 1) = P(6) = \dfrac{1}{6}$.
   $P(X = 2) = P(\overline{6}; 6) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6^2} = \dfrac{5}{36}$.
   $P(X = 3) = P(\overline{6}; \overline{6}; 6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5^2}{6^3} = \dfrac{25}{216}$.
   $P(X = 4) = P(\overline{6}; \overline{6}; \overline{6}; 6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5^3}{6^4} = \dfrac{125}{1296}$.
   $P(X = 5) = P(\overline{6}; \overline{6}; \overline{6}; \overline{6}; 6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5^4}{6^5} = \dfrac{625}{7776}$.
   $P(X = 6) = P(\overline{6}; \overline{6}; \overline{6}; \overline{6}; \overline{6}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 = \dfrac{5^5}{6^5} = \dfrac{3125}{7776}$.
4. $E(X)$, conclusion.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i = 1 \times \dfrac{1}{6} + \cdots + 6 \times \dfrac{3125}{7776} \approx 3,99$.
   La probabilité théorique que le lapin gagne est d'environ 0,6651. En moyenne, il y a environ 3,99 lancers par partie (interprétation de $E(X)$). Ces résultats sont cohérents avec les fréquences obervées sur un grand nombre de simulations à la partie A.