CRSA1. Correction de l'interrogation n° 2

Exercice 2 (cours, 1 point)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
  La forme factorisée de $f(x)$ est alors $a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exercice 3 (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 9x - 11 = 0$.
   $a = 2$, $b = -9$ et $c = -11$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-11) = 81 + 88 = 169 = 13^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 - 13}{4} = -1$. $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 + 13}{4} = \dfrac{11}{2}$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont } \dfrac{11}{2} \text{ et } -1.}$
2. $-2x^2 + 3x - 1 = -5x + 7$.
   Cela équivaut à $-2x^2 + 8x - 8 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 0$. L'équation admet une seule solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \times (-2)} = 2$. $\boxed{S = \{2\}}$
3. $x^2 + 2x + 7 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 7 = -24 < 0$.
   $\boxed{\text{Il n'y a pas de solution réelle.}}$

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

1. Justifier par le calcul que le sommet de la parabole est le point $S(2; 3)$.
   $x_S = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$.
   $y_S = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 7 = 3$.
   Le sommet est le point $S(2; 3)$.
2. En déduire le tableau de variation de f. Justifier.
   Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$

Exercice 5 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$.

1. Vérifier que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 1 et $-\dfrac{2}{3}$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 5}{6} = -\dfrac{2}{3} \quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 5}{6} = 1$
   Les racines sont 1 et $-\dfrac{2}{3}$.
2. En déduire une forme factorisée de $f(x)$. Justifier.
   La forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3(x - 1)\left(x + \dfrac{2}{3}\right).}$

Exercice 6 (Bonus, 1 point)

Déterminer l'expression de la fonction f polynôme du second degré dont les racines sont 2 et 5 et dont la courbe passe par le point $A(10; 8)$.

$f(x) = a(x - 2)(x - 5)$.

Ensuite $f(10) = 8$, soit $a(10 - 2)(10 - 5) = 8$, puis $40a = 8$.

On obtient $a = \dfrac{1}{5}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f(x) = \dfrac{1}{5}(x - 2)(x - 5).}$