1re G . Correction du devoir n^o 2

Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$. $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$.
   $\boxed{\text{La parabole coupe l'axe des abscisses en les points } A(1;0) \text{ et } B(3;0).}$
2. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Dresser le tableau de variation de f. Justifier.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$. $\qquad \beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(2;1)$.
   Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

4. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$.
   Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite (d).
   On étudie le signe de $f(x) - (2x - 3)$.
   $f(x) - (2x-3) = -x^2 + 4x - 3 - 2x + 3 = -x^2 + 2x = x(-x+2)$.
   $x(-x+2) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 2$.
   Le trinôme $f(x) - (2x-3)$ est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) - (2x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc } \mathcal{P} \text{ est en-dessous de } (d) \text{ sur }]\infty;0[\cup]2;+\infty[.\\ \text{Et } \mathcal{P} \text{ est au-dessus de } (d) \text{ sur }]0;2[.\end{array}}$

Exercice 2 (5 points)

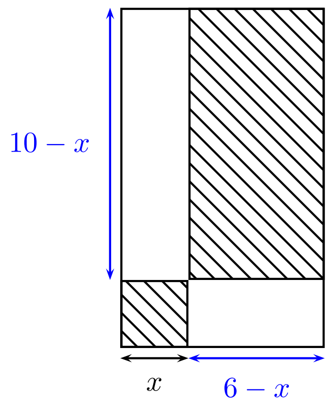
Une carte de vœux rectangulaire, de dimensions 6 cm et 10 cm, comporte un carré et un rectangle colorés représentés ici par des hachures. Afin de minimiser la quantité d'encre pour la partie colorée, on souhaite que la partie blanche soit la plus grande possible.

On note x le côté du carré coloré.

1. Justifier que l'aire colorée est donnée par $f(x) = 2x^2 - 16x + 60$.
   La partie colorée est formée d'un rectangle de dimensions $(10-x)$ et $(6-x)$, et d'un carré de côté x.
   Notons $f(x)$ son aire. La fonction f est définie sur $[0;6]$.
   $\boxed{\text{On a } f(x) = x^2 + (10-x)(6-x) = 2x^2 - 16x + 60.}$
2. Déterminer pour quelles valeurs de x l'aire colorée ne dépasse pas la moitié de la surface totale.
   $\dfrac{10 \times 6}{2} = 30$.
   La moitié de l'aire totale représente 30 cm^2.
   On résout l'inéquation $2x^2 - 16x + 60 \leqslant 30$, soit $2x^2 - 16x + 30 \leqslant 0$, ou encore $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 15 = 4 = 2^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-2}{2} = 3$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+2}{2} = 5$.
   Les deux racines appartiennent à l'intervalle $[0;6]$.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines.

x	0		3		5		6
$x^2 - 8x + 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{L'aire colorée ne dépasse pas la moitié de la surface de la carte pour } x \in [3;5].}$



Exercice 3 (6 points)

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2$.
   Calculer a_0, a_1 et a_2.
   $a_0 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 0\right)^2 = 3^2 = 9$.
   $a_1 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.
   $a_2 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 2\right)^2 = 2^2 = 4$.
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n + 1$. Calculer b_1 et b_2.
   $b_1 = -\frac{2}{3}b_0 + 1 = -\frac{2}{3} \times 5 + 1 = -\frac{7}{3}$.
   $b_2 = -\frac{2}{3}b_1 + 1 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{23}{9}$.
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n - n^2 + 3$. Calculer c_1 et c_2.
   $c_1 = c_0 - 0^2 + 3 = 3 - 0 + 3 = 6$.
   $c_2 = c_1 - 1^2 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8$.
4. Soit (d_n) la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = 3d_{n+1} + d_n$. Calculer d_2 et d_3.
   $d_2 = 3d_1 + d_0 = 3 \times 1 + 1 = 4$.
   $d_3 = 3d_2 + d_1 = 3 \times 4 + 1 = 13$.
5. Soit (k_n) la suite définie par son premier terme $k_0 = 3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $k_{n+1} = 1 + \frac{k_n}{n+4}$. À l'aide de la calculatrice, donner k_{10} arrondi à 10^{-3}. Aucune justification n'est demandée.
   $k_{10} \approx 1{,}084$

Exercice 4 (1 point)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5}{4}u_n + 13$.
Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

```
def Terme(n) :
    u=6
    for k in range(1,n+1):
        u=(5/4)*u+13
    return(u)
```

Exercice 5 (2 points)

Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ n'ait pas de solution réelle.
$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times a \times 1 = 169 - 4a$.
L'équation n'a pas de solution ssi $\Delta < 0$ ssi $169 - 4a < 0$ ssi $-4a < -169$ ssi $a > \frac{169}{4}$.
Attention, à la dernière étape du calcul, on divise par $-4 < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité.

$\boxed{\text{L'équation n'a pas de solution lorsque } a > \frac{169}{4}.}$