

**Exercice 1 (4 points)**

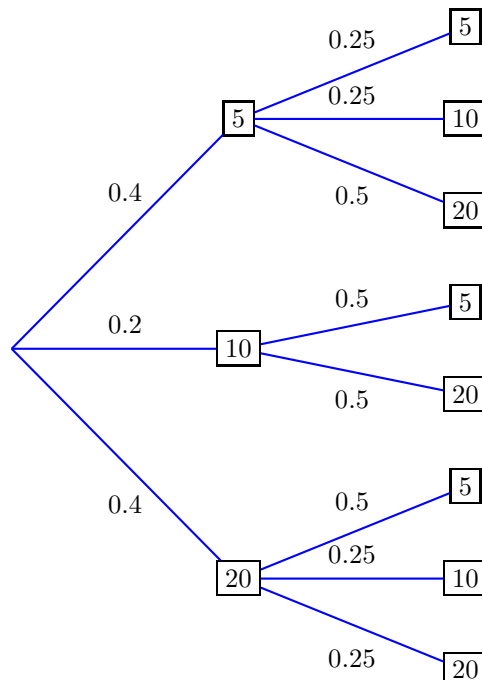
Dans un sac, on met 2 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 2 billets de 20 €.

Pour avoir le droit de jouer, il faut payer 25 €.

On tire successivement et sans remise deux billets du sac.

À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.



2. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ).

Quelles sont les valeurs possibles pour  $X$  ?

$10 - 25 = -15$ ,  $15 - 25 = -10$ ,  $25 - 25 = 0$ ,  $30 - 25 = 5$ ,  $40 - 25 = 15$ .

$X$  est à valeurs dans  $\{-15; -10; 0; 5; 15\}$ .

3. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

$$P(X = -15) = 0.4 \times 0.25 = 0.1.$$

$$P(X = -10) = 0.4 \times 0.25 + 0.2 \times 0.5 = 0.2.$$

$$P(X = 0) = 0.4 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 = 0.4.$$

$$P(X = 5) = 0.2 \times 0.5 + 0.4 \times 0.25 = 0.2.$$

$$P(X = 15) = 0.4 \times 0.25 = 0.1.$$

D'où la loi de probabilité de  $X$  :

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | -15 | -10 | 0   | 5   | 15  |
| $p_i$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

4. Calculer l'espérance de  $X$ . Le jeu est-il intéressant (d'un point de vue financier) ?

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum x_i \times p_i \\
 &= -15 \times 0.1 - 10 \times 0.2 + 0 \times 0.4 + 5 \times 0.2 + 15 \times 0.1 \\
 &= -1.5 - 2 + 0 + 1 + 1.5 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

L'espérance de gain est de  $-1$  €.

Comme  $E(X) < 0$ , le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

**Exercice 2 (6 points)**

1. Compléter :

(a) Soit  $(u_n)$  est une suite **arithmétique** de raison  $r$  et de premier terme  $u_1$ .

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = u_1 + (n - 1)r$ .

- (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite

**géométrique** de raison différente de 0 et de 1.

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  non nulle et distincte de 1.

$$\text{Pour tout } n \geq 0, u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. Soit  $(V_n)$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = 4$  et de raison 5.

- (a) Calculer  $V_{20}$ .

$$\text{Pour tout } n \geq 0, V_n = V_0 + nr.$$

$$V_{20} = V_0 + 20r = 4 + 20 \times 5 = 104.$$

- (b) Calculer  $S_{20} = V_0 + V_1 + \dots + V_{20}$ .

$$S_{20} = \frac{(V_0 + V_{20}) \times 21}{2} = \frac{(4 + 104) \times 21}{2} = 54 \times 21 = 54 \times 20 + 54 = 1080 + 54 = 1134.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Exprimer en fonction de  $n$ ,  $T_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

C'est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de 1er terme  $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$  et de raison  $\frac{2}{3}$ . Il y a  $(n+1)$  termes puisqu'on va de  $\left(\frac{2}{3}\right)^0$  à  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

$$T_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Il est clair que pour tout entier  $n$ ,  $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0$ , et donc  $\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 1$ , puis  $T_n \leq 3$ .

Donc  $(T_n)$  est majorée par 3.

- (b) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $T_n \geq 2,9999$ . Justifier.

La suite  $(T_n)$  est strictement croissante puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} - T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 0$ .

On observe que  $T_{25} \approx 2,999881 < 2,9999$ , et  $T_{26} \approx 2,999921 > 2,9999$ .

L'entier cherché est donc 26.

### Exercice 3 (6 points)

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros.

Le 1<sup>er</sup> janvier 2018 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le montant déposé le mois précédent. On note  $u_1 = 30$  le montant déposé en janvier 2018, et pour tout  $n \geq 1$ , on note  $u_n$  le montant déposé le  $n^{\text{e}}$  mois.

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .

$$u_2 = u_1 + 12 = 42, \text{ et } u_3 = u_2 + 12 = 42 + 12 = 54.$$

2. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 12.$$

Donc la suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison 12.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, u_n = u_1 + (n-1)r = 30 + (n-1) \times 12.$$

3. Calculer  $u_{12}$  et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.

$$u_{12} = 30 + 11 \times 12 = 162.$$

Le 1<sup>er</sup> décembre 2018, il dépose la somme de 162 euros.

4. On note  $C_n$  le capital accumulé par Jimi le  $n^{\text{e}}$  mois. Ainsi,  $C_1 = 30$  pour le mois de janvier 2018.

- (a) Déterminer l'expression de  $C_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{aligned} C_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} \\ &= \frac{[30 + 30 + (n-1) \times 12] \times n}{2} \\ &= \frac{(48 + 12n)n}{2} \\ &= (24 + 6n)n \\ &= 6n^2 + 24n \end{aligned}$$

- (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.

On cherche le plus petit entier  $n$  tel que  $C_n \geq 1500$ .

On résout l'inéquation  $6x^2 + 24x - 1500 \geq 0$ .

En simplifiant par 6,  $x^2 + 4x - 250 \geq 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1016.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots \approx -17,93.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots \approx 13,93.$$

Le trinôme est positif (signe de  $a$ ) à l'extérieur des racines.

| $x$              | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|-------|-------|-----------|
| $x^2 + 4x - 250$ |           | +     | -     | +         |

Le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $6n^2 + 24n \geq 1500$  est donc  $n = 14$ .

Le mois d'indice 14 est le mois de février 2019.

Il pourra acheter la guitare en février 2019.

#### Exercice 4 (4 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1000$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 90$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

$$u_1 = 0,9 \times 1000 + 90 = 990.$$

$$u_2 = 0,9 \times 990 + 90 = 981.$$

2. On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout  $n \geq 0$  par  $V_n = u_n - 900$

- (a) Calculer  $V_0$  et  $V_1$ .

$$V_0 = u_0 - 900 = 100.$$

$$V_1 = u_1 - 900 = 90.$$

- (b) Montrer que la suite  $(V_n)$  est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0,9u_n + 90 - 900 \\ &= 0,9u_n - 810 \\ &= 0,9(V_n + 900) - 810 \\ &= 0,9V_n + 810 - 810 \\ &= 0,9V_n \end{aligned}$$

Donc  $(V_n)$  est la suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme  $V_0 = 100$ .

- (c) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .

$$V_n = V_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n.$$

3. En déduire que pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = u_n - 900$ , soit  $u_n = V_n + 900$ .

Donc  $u_n = 100 \times 0,9^n + 900$ .

4. Soit  $n \geq 0$ .

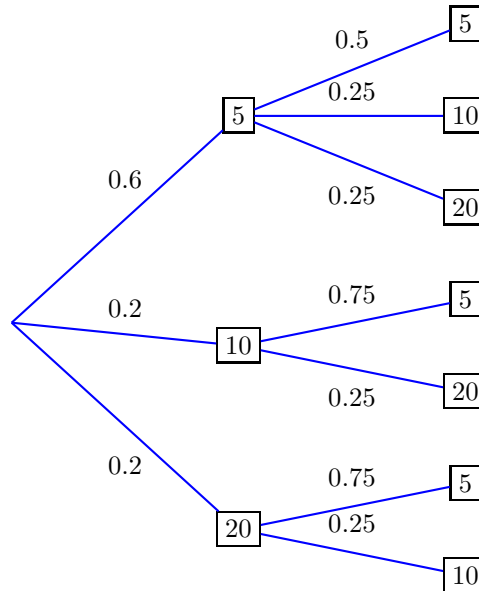
Déterminer l'expression en fonction de  $n$  de  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sum_{k=0}^n (100 \times 0,9^k + 900) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n 100 \times 0,9^k \right) + \sum_{k=0}^n 900 \\ &= 100 \times \frac{1 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9} + 900 \times (n+1) \\ &= 1000(1 - 0,9^{n+1}) + 900 \times (n+1) \end{aligned}$$

## Réponses du sujet 2

### Exercice 5 (4 points)

1. Le sac contient trois billets de 5, un billet de 10, et un billet de 20.



2.  $10 - 21 = -11$ ,  $15 - 21 = -6$ ,  $25 - 21 = 4$ ,  $30 - 21 = 9$ .

Les valeurs possibles de  $X$  sont  $-11$ ,  $-6$ ,  $4$  et  $9$ .

3. Loi de  $X$  :

Par exemple pour  $P(X = -6)$ ,

$$P(X = -6) = P(5; 10) + P(10; 5) = 0,6 \times 0,25 + 0,2 \times 0,75 = 0,3. \text{ etc...}$$

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | -11 | -6  | 4   | 9   |
| $p_i$ | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

4. Espérance de  $X$ .

$$E(X) = \sum x_i \times p_i = \dots = -3 < 0.$$

Comme  $E(X) < 0$ , le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

### Exercice 6 (6 points)

1. Compléter :

- (a) Soit  $(u_n)$  est une suite **géométrique** de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

Pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$ .

- (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1).$$

2. Soit  $(V_n)$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = 11$  et de raison 6.

- (a) Calculer  $V_{20}$ .  $V_{20} = 11 + 6 \times 20 = 131$

- (b) Calculer  $S_{20} = V_0 + V_1 + \dots + V_{20}$ .

$$S = 1491.$$

3. Soit un entier  $n \geq 1$ .

- (a) Exprimer en fonction de  $n$ ,  $T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , et en déduire  $(T_n)$  est majorée par 1.

$$T_n = 1 - 0,5^n. \text{ Donc pour tout } n \geq 0, T_n \leq 1.$$

- (b) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $T_n \geq 0,9999$ . Justifier.

L'entier est  $n = 14$ .

**Exercice 7 (6 points)**

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros.

Le 1<sup>er</sup> janvier 2018 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 15 euros de plus que le montant déposé mois précédent. On note  $u_1 = 30$  pour le mois de janvier 2018, et pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n$  le montant déposé le  $n^{\text{e}}$  mois.

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .  
 $u_2 = 30 + 15 = 45$ ,  $u_3 = u_2 + 15 = 60$ .
2. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ . Justifier.  
 $u_n = u_1 + (n - 1)r = 30 + (n - 1) \times 15$ .
3. Calculer  $u_{12}$  et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.  
 $u_{12} = 195$ . C'est le dépôt du mois de décembre 2018.
4. On note  $C_n$  le capital accumulé par Jimi le  $n^{\text{e}}$  mois. Ainsi,  $C_1 = 30$  pour le mois de janvier 2018.  
(a) Déterminer l'expression de  $C_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{aligned}
 C_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
 &= \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} \\
 &= \frac{[30 + 30 + (n - 1) \times 15] \times n}{2} \\
 &= \frac{(45 + 15n)n}{2} \\
 &= 7,5n^2 + 22,5n
 \end{aligned}$$

- (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.

$$C_n \geq 1500 \text{ pour } n \geq 13.$$

Il pourra acheter la guitare en janvier 2018.

**Exercice 8 (4 points)**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2000$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
 $u_1 = 1650$ ,  $u_2 = 1370$ .
2. On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout  $n \geq 0$  par  $V_n = u_n - 250$ 
  - (a) Calculer  $V_0$  et  $V_1$ .  
 $V_0 = 1750$ ,  $V_1 = 1400$ .
  - (b) Montrer que la suite  $(V_n)$  est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.  
 $V_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8(V_n + 250) + 50 - 250 = 0,8V_n$ .  
 $(V_n)$  est géométrique de raison 0,8.  $V_0 = u_0 - 250 = 1750$ .
  - (c) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .  
 $V_n = V_0 \times q^n = 1750 \times 0,8^n$ .
3. En déduire que pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = 1750 \times (0,8)^n + 250$ .  $u_n = V_n + 250 = 1750 \times (0,8)^n + 250$ .
4. Soit  $n \geq 0$ .

Déterminer l'expression en fonction de  $n$  de  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

$$S_n = 1750 \times \frac{1 - 0,8^{n+1}}{1 - 0,8} + 250 \times (n + 1) = 8750 \times (1 - 0,8^{n+1}) + 250 \times (n + 1).$$