1G. Interrogation n° 10. Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

Compléter sur l'énoncé :

1. Donner la formule de l'espérance $E(X)$ et celle de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire X dont les valeurs sont x_1, x_2, …, x_k et les probabilités respectives p_1, p_2, …, p_k.
   $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \times p_i$ $\qquad$ $V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times p_i$
2. Énoncer le théorème fondamental sur dérivée et variation des fonctions.
   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
   (a) f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
   (c) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Exercice 2 (4 points)

Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de N billets.
Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.
On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
   $1 + 5 + 50 = 56$. Il y a 56 billets gagnants.
   Il y a donc $N - 56$ billets non gagnants.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   $5000 - 5 = 4995$, $1000 - 5 = 995$, et $50 - 5 = 45$.
   Les valeurs possibles de X sont donc 4995 ; 995 ; 45 ; -5.
   (c) Déterminer, en fonction de N, la loi de probabilité de X.
   On a vu qu'il y a $N - 56$ billets perdants.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(X = 4995) = \dfrac{1}{N}$. $\qquad$ $P(X = 995) = \dfrac{5}{N}$.
   $P(X = 45) = \dfrac{50}{N}$. $\qquad$ $P(X = -5) = \dfrac{N-56}{N}$.
   La loi de X se résume donc par le tableau suivant :

x_i	4995	995	45	-5
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{N}$	$\dfrac{5}{N}$	$\dfrac{50}{N}$	$\dfrac{N-56}{N}$

2. Justifier que l'espérance de X est donnée par $E(X) = \dfrac{12500}{N} - 5$.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i$.
   $E(X) = \dfrac{4995 \times 1 + 995 \times 5 + 45 \times 50 - 5 \times (N - 56)}{N}$
   $E(X) = \dfrac{12500 - 5N}{N} = \dfrac{12500}{N} - 5$
3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.
   (a) Déterminer le nombre N de billets à émettre.
   Le bénéfice de l'organisateur s'exprime par sa recette moins les coûts qui correspondent aux lots gagnants.
   On a donc $5 \times N - (5000 + 5 \times 1000 + 50 \times 50) = 2000$
   D'où $5N = 2000+12500$, puis $5N = 14500$, et $N = 2900$.
   $\boxed{\text{La loterie compte 2900 billets.}}$
   (b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
   $\boxed{E(X) = \dfrac{12500}{2900} - 5 = \dfrac{-20}{29} \approx -0,69.}$
   (c) Calculer alors la probabilité de l'événement A « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».
   $P(A) = P(X \geqslant 45) = 1 - P(X = -5)$
   $P(A) = 1 - \dfrac{2900 - 56}{2900} = \dfrac{56}{2900} = \dfrac{14}{725} \approx 0,019.$
   $\boxed{\text{Le joueur a environ 1,9\% de chance de tomber sur un billet gagnant.}}$

Exercice 3 (5 points)
Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. (a) Calculer $f'(x)$, la dérivée de f.
f est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-10;10]$.
$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-10;10],\ f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.}$

(b) Déterminer le tableau de variation de f sur $[-10;10]$.
On étudie le signe de $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 4 \times 3 \times 9 = 144 = 12^2 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-12}{6} = -1$.
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+12}{6} = 3$.
Le trinôme $f'(x)$ prend le signe de a à l'extérieur des racines (ici $a = 3 > 0$).

x	-10		-1		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1209	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	611

(c) En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-10;10]$.
D'après la question précédente, sur $[-10;10]$, le minimum de f est -1209 et le maximum est 611.
$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in [-10;10],\ -1209 \leqslant f(x) \leqslant 611.}$

2. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ces points.
La tangente T au point d'abscisse x est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$ ssi T a pour coefficient directeur -9 ssi $f'(x) = -9$ ssi $3x^2 - 6x = 0$ ssi $x(3x-6) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $x = 2$).
$f(0) = 1$ et $f(2) = -21$.

Il y a deux points en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -9 et est donc parallèle à cette droite.
Ce sont les points $A(0;1)$ et $B(2;-21)$.

Exercice 4 (4 points)
Démontrer que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.
Indication : on sera amené à étudier les variations la fonction P définie sur $]0;+\infty[$ par $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$.
Notons x la longeur d'un côté du rectangle.
$x > 0$ d'après le contexte.
L'autre dimension est alors $\dfrac{100}{x}$ car l'aire est 100.
Le périmètre est donc $P(x) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right) = 2x + \dfrac{200}{x}$.
La fonction P est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$,
$P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2-200}{x^2} = \dfrac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$.
Comme $x > 0$, on a $x + 10 > 0$.
Et comme $x^2 > 0$ et $2 > 0$, P' a le même signe que $x - 10$.

x	0		10		$+\infty$
$P'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$\|$	$\searrow$	40	$\nearrow$	

$P(10) = 40$.

D'après les variations, le périmètre est au minimum de 40, et ce minimum est obtenu lorsque $x = 10$ (le rectangle est alors un carré).