

Term G Spécialité. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = -4 + \frac{u_n}{5}$.

1. Montrer que, pour tout entier n , $-6 \leq u_n \leq 0$.

On raisonne par récurrence.

Initialisation

On a $u_0 = 0$, donc $-6 \leq u_0 \leq 0$.

Hérédité

Soit $k \geq 0$. Supposons que $-6 \leq u_k \leq 0$.

Montrons $-6 \leq u_{k+1} \leq 0$.

$$-6 \leq u_k \leq 0, \text{ donc } \frac{-6}{5} \leq \frac{u_k}{5} \leq 0, \text{ puis } \frac{-6}{5} - 4 \leq \frac{u_k}{5} - 4 \leq 0 - 4,$$

$$\text{soit } -5,2 \leq u_{k+1} \leq -4.$$

$$\text{Or, } -6 < -5,2, \text{ et } -4 < 0.$$

On a donc bien $-6 \leq u_{k+1} \leq 0$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $-6 \leq u_n \leq 0$.

2. Conjecturer les variations de la suite (u_n) , et démontrer votre conjecture en utilisant une démonstration par récurrence.

$$u_0 = 0, u_1 = -4 + 0 = -4, u_2 = -4 - \frac{4}{5} = -4,8, u_3 = -4,96.$$

En observant les premiers termes de (u_n) , il semble que cette suite soit strictement décroissante.

On va donc montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} < u_n$.

Initialisation

On a vu que $u_0 = 0$ et $u_1 = -4$.

On a donc bien $u_1 < u_0$.

Hérédité

Considérons un entier $k \geq 0$, et supposons que $u_{k+1} < u_k$.

$$\text{Alors, } \frac{1}{5}u_{k+1} < \frac{1}{5}u_k, \text{ puis } \frac{u_{k+1}}{5} - 4 < \frac{u_k}{5} - 4.$$

On a donc $u_{k+2} < u_{k+1}$.

L'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{3}x} - 2x^2 - 12x - \frac{67}{2}$.

Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $6y' - 2y = 4x^2 - 5$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} - 4x - 12$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 6f'(x) - 2f(x) &= 6\left(\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} - 4x - 12\right) - 2\left(e^{\frac{1}{3}x} - 2x^2 - 12x - \frac{67}{2}\right) \\ &= 2e^{\frac{x}{3}} - 24x - 72 - 2e^{\frac{x}{3}} + 4x^2 + 24x + 67 \\ &= 4x^2 - 5 \end{aligned}$$

f est bien une solution particulière de l'équation $6y' - 2y = 4x^2 - 5$.

Exercice 3 (n° 73 p 279 du manuel)

Sur $[0; 2]$, $f(x) = e^{-x^2}$ exprime le profil de la piste.

1. Expression de l'aire $A(x)$ de l'affiche.

L'affiche est un rectangle de dimensions x et $f(x)$, son aire est donc

$$A(x) = L \times \ell = x \times e^{-x^2}$$

2. Position du point M pour que l'aire soit maximale.

On cherche les variations de f en étudiant le signe de sa dérivée.

Dérivée d'un produit de deux fonctions : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Ici, $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$.

$$v(x) = e^{-x^2}, \text{ donc } v'(x) = -2xe^{-x^2} \text{ car } (e^u)' = u'e^u.$$

$$\text{Ainsi, } A'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2xe^{-x^2}) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

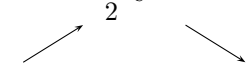
Pour tout $x \in [0; 2]$, $e^{-x^2} > 0$, car une exponentielle est toujours positive stricte.

Donc $A'(x)$ a le même signe que $1 - 2x^2$ qui est une expression du second degré.

$$1 - 2x^2 = 0 \text{ssi } x^2 = \frac{1}{2} \text{ssi } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le trinôme $1 - 2x^2$ prend le signe de a (-2 ici) à l'extérieur des racines.

En tenant compte du fait que $-\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0; 2]$, il vient :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ 		

$$\text{Enfin, } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}, \text{ et } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,429.$$

L'aire maximale est donc d'environ 0,429, obtenue lorsque $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$.