Intégration par parties

I Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit $u \times v$ est :

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

D'où

$$u'v = (uv)' - uv'$$

Les fonctions u et v sont dérivables donc continues sur I.
Si de plus, les fonctions u' et v' sont continues sur I, alors $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont continues et donc intégrables sur I. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\ \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

c'est à dire

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Théorème (intégration par parties)
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont continues sur I, alors, quels que soient les éléments a et b de I, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

II Exemples d'application

On peut utiliser une intégration par parties pour calculer une intégrale d'une fonction dont on ne sait pas trouver une primitive, ou pour trouver une primitive d'un fonction.

II.1 Calcul d'une intégrale

On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.
On pose, pour tout $x \in [0;1]$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$, et $v(x) = x$.
Donc $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$. D'où $I = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$.

II.2 Recherche de primitive

On cherche la primitive de la fonction logarithme népérien (ln) qui s'annule en $x = 1$.
Soit F cette primitive.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$.
On pose, pour tout $t > 0$, $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln(t)$.
Donc $u(t) = t$, et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$

Donc $F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \displaystyle\int_1^x 1\ \mathrm{d}t = x\ln x - 1\ln(1) - [t]_1^x = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1$.

III Exercices

Exercice 1
Calculer en utilisant une intégration par parties $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x - \mathrm{e}) \ln(x) \, \mathrm{d}x$.

Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2
Calculer en utilisant une intégration par parties $I = \displaystyle\int_0^2 (2 - x)\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3
Calculer à l'aide d'une intégration par parties. Vérifier avec la calculatrice ou un logiciel.

$A = \displaystyle\int_0^1 (t - 5)\mathrm{e}^{3t} \, \mathrm{d}t$

$B = \displaystyle\int_0^1 (-3t + 1)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$

$C = \displaystyle\int_0^1 (6 - 4t)\mathrm{e}^{-2t} \, \mathrm{d}t$

$D = \displaystyle\int_0^1 (2t + 3)\mathrm{e}^{1{,}5t} \, \mathrm{d}t$

$E = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (t - 5) \ln(t) \, \mathrm{d}t$

$F = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t - 1) \sin(t) \, \mathrm{d}t$

$G = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (t + 1) \cos(t) \, \mathrm{d}t$

$H = \displaystyle\int_0^{\pi} (t - 1)) \sin(-2t) \, \mathrm{d}t$

$J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (t^2 + 3t - 5) \ln(2t) \, \mathrm{d}t$

$K = \displaystyle\int_0^{\pi/3} (-3t) \cos(3t) \, \mathrm{d}t$

Exercice 4 (deux intégrations par parties)
À l'aide de deux intégrations par parties, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 (x - 2)^2\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 5
Soit n un entier relatif différent de -1.

1. Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln(t) \, \mathrm{d}t$ à l'aide d'une IPP.
2. En déduire le calcul de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t$.
   Indication : appliquer une IPP au départ.