

BTS – Dérivation

Un peu d'histoire

L'histoire du calcul infinitésimal remonte à l'Antiquité. Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens : Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz.

Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Archimède, Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment.

C'est à Lagrange (fin du XVIII^e siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x . C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

I Nombre dérivé et tangente

On considère une fonction f définie sur un intervalle I , a un nombre réel de I .

Si la courbe de f admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on dit que f est dérivable en a .

Définition

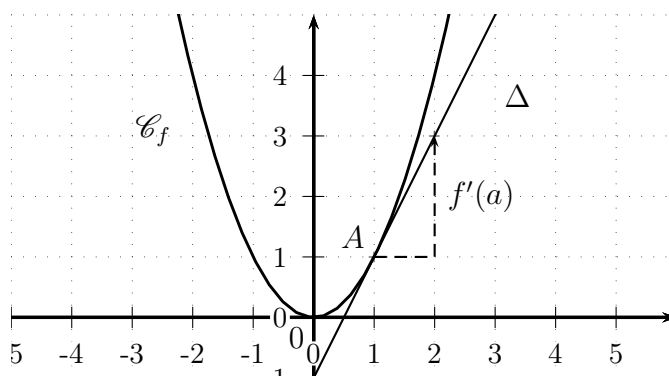
Le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .

Définition (tangente)

Soit f une fonction dérivable en le réel a .

La tangente à la courbe de f en a est la droite qui passe par le point de coordonnées $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple :



Sur cet exemple, on lit $f'(1) = 2$ car la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.

Remarque (rappel sur le coefficient directeur d'une droite)

Le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Propriété (équation de tangente)

Soit f une fonction dérivable en un réel a .

Une équation de la tangente T_a à la courbe de f au point $A(a; f(a))$ d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

II Fonction dérivée

Définition

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel de I . Alors la fonction dérivée f' associe à tout réel x de I le nombre dérivé $f'(x)$.

Théorème (Dérivées usuelles ♡)

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (fonction constante) $f(x) = x$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^n, n \geq 1$	$f'(x) = 2x$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \leq -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$ $f'(x) = \ln(x)$	$f'(x) = e^x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$	$I = \mathbb{R}$ $I =]0; +\infty[$

Exemples :

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^5$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4$.

Si pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, alors pour tout $x \neq 0$ $g'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

Théorème (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I , soit $k \in \mathbb{R}$.

1. Somme de fonctions.

La fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

2. Produit par un nombre réel.

Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.

3. Produit de fonctions.

La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

4. Inverse et quotient.

Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I, v(x) \neq 0$), alors

— la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

— la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Propriété (Composée)

Soient $u : I \rightarrow J$, et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

On pose $f(x) = (g \circ u)(x) = g(u(x))$.

Fonction	Dérivée
$f = (g \circ u)$	$(g' \circ u) \times u'$

Cas particuliers :

Fonction	Dérivée
e^u	$u' \times e^u$
$\ln(u)$, avec $u > 0$	$\frac{u'}{u}$
u^n ($n \geq 1$)	$nu^{n-1} \times u'$
$\sqrt{u}$, avec $u > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

III Applications à l'étude des fonctions

Théorème (dérivée et sens de variation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I .
2. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I .
3. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .

Remarque

Le signe de la dérivée f' détermine les variations de la fonction f .

IV Exercices du cours

Exercice 1

Soit f une fonction telle $f(2) = -3$ et $f'(2) = 0,4$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

Exercice 2

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x - 5$
2. $g(x) = \frac{4}{x}$
3. $h(x) = x^2 + 7x^3 - 10x^4$
4. $i(x) = (2x + 3)\sqrt{x}$
5. $j(x) = \frac{1}{3x^2}$
6. $k(x) = \frac{3 - x}{6x + 1}$

Exercice 3

À l'aide de la propriété, dériver les fonctions suivantes :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7x + 4)^3$.
2. Soit f la fonction définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 10}$.
3. Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 3[$ par $f(x) = \sqrt{-4x + 12}$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x+5}$.
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(4x^2 + 5)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$.

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f .
2. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f .

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[0; 3]$ par $g(x) = \frac{x - 1}{2x + 1}$.

1. Déterminer la dérivée $g'(x)$ de g .
2. Étudier le signe de g' et en déduire le tableau de variation de g sur $[0; 3]$.