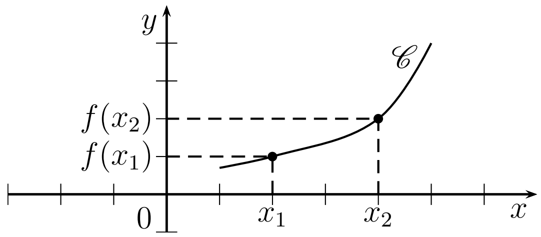
Chapitre 5 : Variations des fonctions et extrema

I Fonction croissante, fonction décroissante

I.1 Fonction croissante sur un intervalle

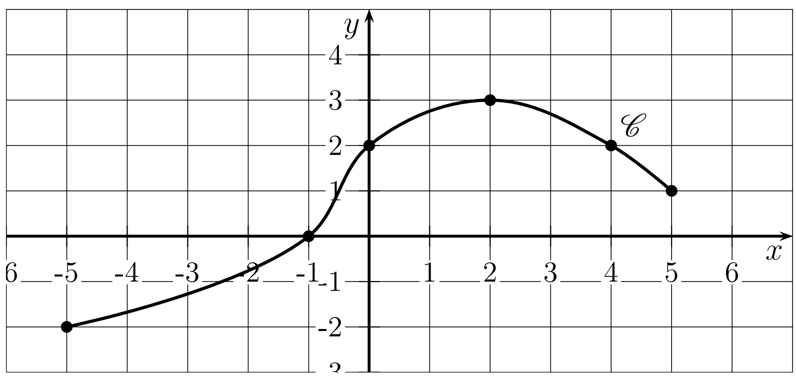
Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$



Remarque
On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
En effet, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 (l'inégalité est dans le même sens entre deux réels et leurs images respectives).
La courbe représentative d'une fonction croissante sur un intervalle I a une allure « montante » sur I.
Pour une foncton f croissante sur I, lorsque la variable x augmente, les valeurs $f(x)$ de la fonction augmentent.

Exercice 1
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 5]$.

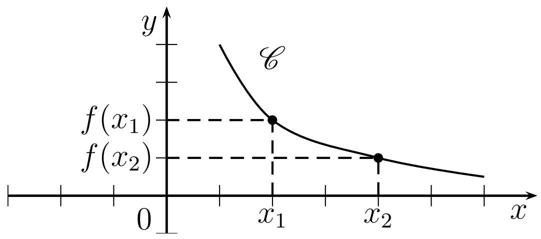


1. À l'aide du graphique, donner l'image par f des réels -5, -1, 0, 2, 4, et 5.
2. Justifier que f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-5; 5]$.
3. Donner sans justifier le plus grand intervalle sur lequel f est croissante.

I.2 Fonction décroissante sur un intervalle

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.
La courbe représentative d'une fonction croissante sur un intervalle I a une allure « descendante » sur I.
Pour une foncton f décroissante sur I, lorsque la variable x augmente, les valeurs $f(x)$ de la fonction diminuent.

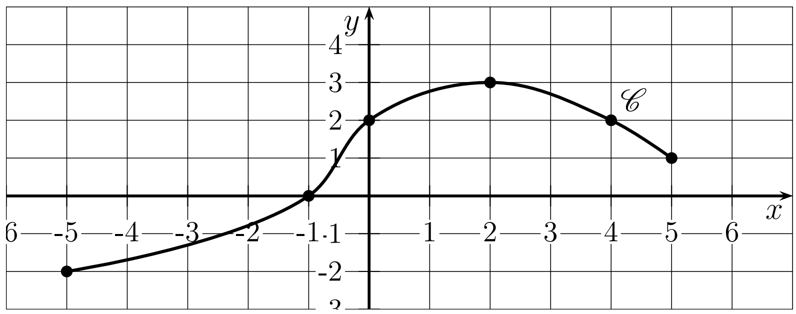
Remarque
En remplaçant avec des inégalités strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) sur I :
La fonction f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

Exercice 2
On reprend les données de l'exercice 1.



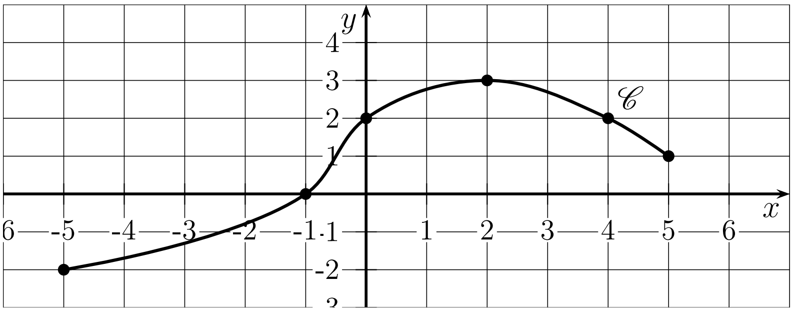
1. Montrer que f n'est pas décroissante sur $[-5; 5]$.
2. Donner sans justifier le plus grand intervalle où f est décroissante.

Définition (fonction monotone)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I (un seul sens de variation sur tout l'intervalle).

II Tableau de variation d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variation.
Il précise les plus grands intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.

Exemple :
On reprend la fonction de l'exercice 1.

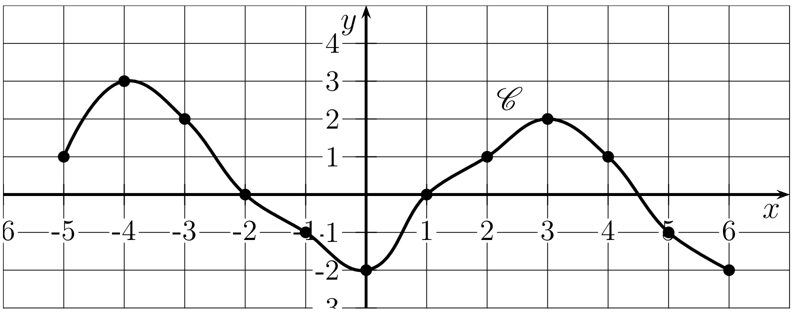


La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5; 5]$.
Elle est croissante sur $[-5; 2]$, et décroissante sur $[2; 5]$.

x	-5		2		5
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Remarque
Dans la ligne de $f(x)$, on indique les images correspondantes par f.

Exercice 3
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 6]$.



Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 4
On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-10		-3		1		8
$f(x)$	67	$\searrow$	41	$\nearrow$	103	$\searrow$	89

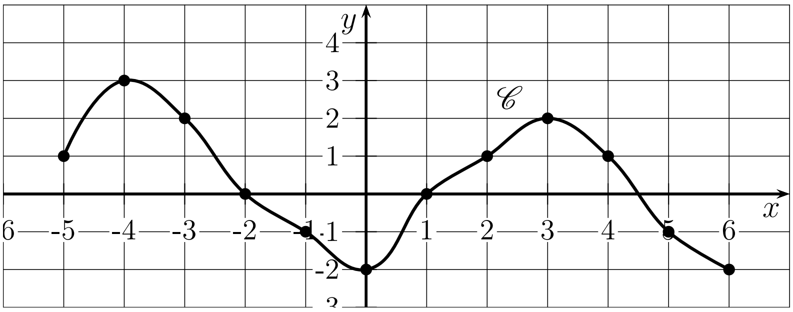
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner les images par f indiquées dans le tableau.
3. Indiquer les intervalles :
   (a) où f est croissante.
   (b) où f est décroissante.
4. Comparer $f(-7)$ et $f(-6)$. Justifier
5. Comparer $f(0)$ et $f(0,5)$. Justifier.
6. Donner un encadrement de $f(5)$.
7. Peut-on comparer $f(-1)$ et $f(5)$?
8. Peut-on comparer $f(-7)$ et $f(5)$?

III Extrema d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leqslant f(a).$$
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant f(a).$$
Le minimum de f sur I est $f(a)$.
3. Un extremum est un minimum ou un maximum.

Exercice 5
On reprend les données de l'exercice précédent. Compléter.

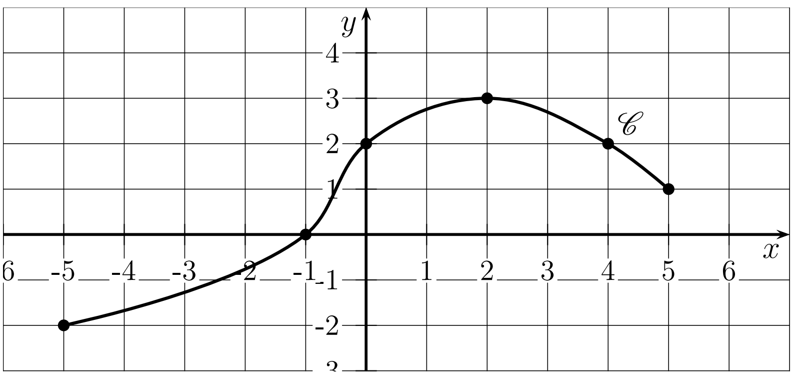


1. Le maximum de f sur $[-5;6]$ est .... Il est atteint en ....
2. Le minimum de f $[-5;6]$ est .... Il est atteint en ... et ....

IV Tableau de signe d'une fonction

On peut résumer le signe d'une fonction dans un tableau de signe. Il précise les intervalles où la fonction est strictement positive, ceux où elle est strictement négative, et les valeurs en lesquelles la fonction s'annule.

Exercice 6
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;5]$.



1. Compléter.
   (a) $f(x) = 0$ ssi ...
   (b) $f(x) > 0$ ssi ...
   (c) $f(x) < 0$ ssi ...
2. En déduire le tableau de signe de f.

V Exercices corrigés

Exercice 7 (corrigé)
On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les images par f de -3, -1, 0, 2, et 5.
   $f(-3) = (-3)^2 = 9$; $f(-1) = (-1)^2 = 1$; $f(0) = 0^2 = 0$; $f(2) = 2^2 = 4$, et $f(5) = 5^2 = 25$.
2. En donnant un contre-exemple, montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
   On a $-3 < 2$, et $f(-3) > f(2)$, donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer de même que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
   On a $0 < 2$, et $f(0) < f(2)$, donc f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (corrigé)
Montrer que la fonction affine f définie par $f(x) = 3x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Soient a, b deux nombres réels.
Supposons que $a < b$.
$f(a) - f(b) = (3a + 1) - (3b + 1) = 3a - 3b = 3(a - b)$.
Comme $a < b$, on a $a - b < 0$.
En multipliant par 3>0, le sens de l'inégalité est conservé. Donc $3(a - b) < 0$.
Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$.
On a montré que pour tous réels a et b, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

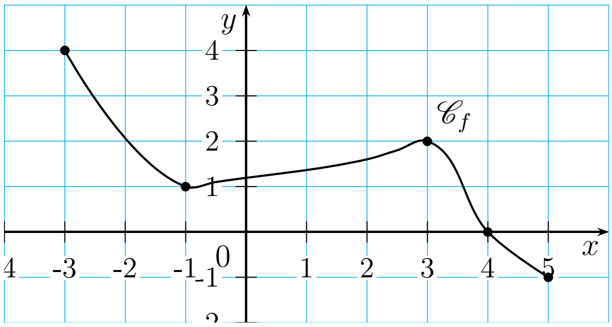
Exercice 9 (corrigé)
On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		-1		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

De plus, l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est 4.

1. Indiquer le maximum de f sur$[-3; 5]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
   Le maximum de f est 4. Il est atteint en -3 (ce qui signifie lorsque $x = -3$).
2. Comparer $f(-2,5)$ et $f(-2,4)$. Justifier.
   $-2,5 < -2,4$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3; 1]$ qui contient $-2,5$ et $-2,4$.
   Donc $f(-2,5) \leqslant f(-2,4)$.
3. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :
   Lorsque $x \in [-3; -1]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
4. Donner un encadrement de $f(-2)$ et de $f(3,6)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?
   $1 \leqslant f(-2) \leqslant 4$, et $-1 \leqslant f(3,6) \leqslant 2$.
   Cela ne suffit pas pour comparer ces deux images (-2 et 3,6 ne sont pas dans un même intervalle où f est croissante ou décroissante.
5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "Pour tout $x \in [-3; 5]$, $f(x) \geqslant -2$."
   Vrai, car le minimum de f sur $[-3; 5]$ est -1.
   Donc pour tout $x \in [-3; 5]$, $f(x) \geqslant -1 > -2$.
   (b) "Il existe au moins un réel x dans l'intervalle $[-3; 5]$ tel que $f(x) > x$."
   Vrai : $x = -3$ convient. En effet, $f(-3) = 4 > -3$.

6. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec <u>toutes</u> les données de l'énoncé.
   En plus du tableau de variation, on sait que l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est 4, donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $(4; 0)$.

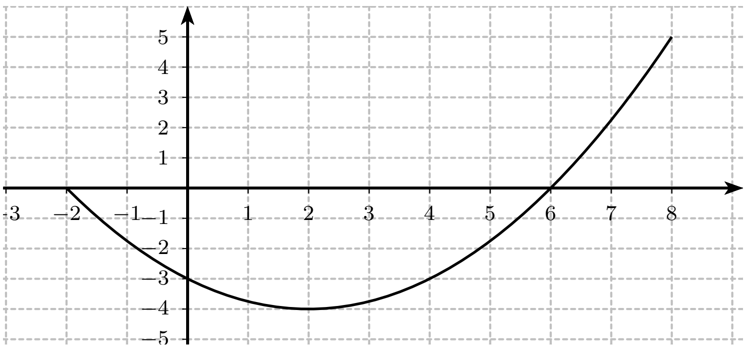


7. Dresser le tableau de signe de f.

x	-3		4		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	

   En effet, $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-3; 4[$, $f(x) < 0$ pour tout $x \in]4; 5]$, et $f(x) = 0$ ssi $x = 4$.

Exercice 10 (corrigé)
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
   f est définie sur l'intervalle $[-2; 8]$.
2. Lire $f(4)$ et $f(6)$.
   $f(4) = -3$ et $f(6) = 0$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

x	-2		2		8
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

4. Donner le maximum de f sur son ensemble de définition, et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.
   Le maximum de f est 5, il est atteint lorsque $x = 8$.
5. Donner le minimum de f et préciser en quelle valeur il est atteint.
   Le minimum de f est -4, il est atteint lorsque $x = 2$.

6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à -3.
   Les solutions sont 0 et 4.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < -3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement inférieure à -3. L'ensemble solution est l'intervalle $]0;4[$.

Exercice 11 (corrigé)

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-3		1		4
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-1

1. Comparer $f(2,5)$ et $f(3,4)$. Justifier.
   $2,5 < 3,4$, et f est décroissante sur l'intervalle $[1;4]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(2,5) \geqslant f(3,4)$.
2. Comparer $f(-0,4)$ et $f(-0,1)$. Justifer. $-0,4 < -0,1$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3;1]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(-0,4) \leqslant f(-0,1)$.
3. On admet de plus que f vérifie les conditions suivantes :
   Les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
   Tracer une courbe de fonction compatible avec toutes les données de l'énoncé.
   Comme les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, la courbe passe par les points de coordonnées $(-1;0)$, et$(2;0)$.
   Comme $f(0) = \dfrac{1}{2}$, la courbe passe aussi par le point $(0;\dfrac{1}{2})$.