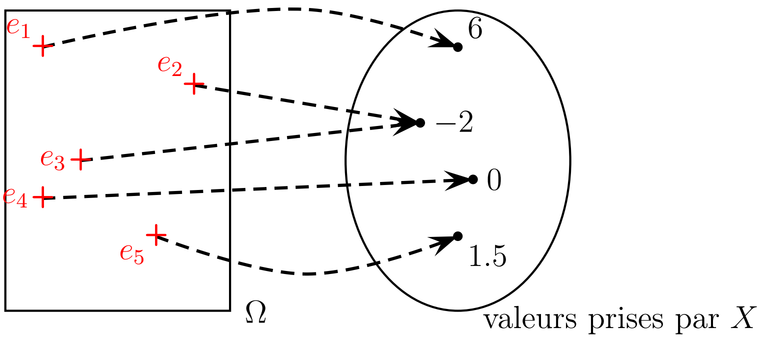
Variables aléatoires discrètes. Loi binomiale.

I Variable aléatoire : rappels

Définition (Variable aléatoire)
Soit $\Omega = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un univers fini composé de n issues notées e_1, e_2, $\ldots e_n$.
Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Définir une variable aléatoire X revient donc à associer à chaque issue e_i un nombre réel x_i.



Définition (Loi de probabilité de X)
On définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X lorsque l'on associe sa probabilité à chacune des valeurs prises par X . On la présente souvent sous la forme d'un tableau.

x_i	x_1	$\ldots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	$\ldots$	p_k

Remarque
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$.
On a toujours $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1$.
Autrement dit, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Exercice 1
On propose le jeu suivant : La mise est de 5 euros. On lance un dé cubique équilibré.
Si l'on obtient un nombre pair, on perd sa mise.
Sinon, on récupère le triple du nombre indiqué sur le dé.
On note X le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.

1. Déterminer les valeurs possibles de X.
2. Quelles sont les issues qui réalisent l'évènement $X = -5$?
3. Déterminer la loi de la variable X.

Définition (Espérance d'une variable aléatoire)
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.
L'espérance de X, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, P(X = x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k$$

Remarque
L'espérance d'une variable aléatoire s'interprète comme la valeur moyenne prise par X lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Remarque
Lorsque X est une variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, l'espérance $E(X)$ correspond au gain moyen par partie que le joueur obtendrait sur un très grand nombre de parties.
— $E(X) > 0$ signifie que le jeu est intéressant pour le joueur ;
— $E(X) = 0$ ssi le jeu est équitable ;
— $E(X) < 0$ signifie que le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

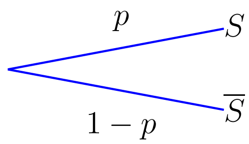
Exercice 2
Déterminer l'espérance de X de l'exercice précédent. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 3 (répétition d'épreuves indépendantes)
On dispose d'une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 10 si les deux boules tirées sont rouges, 5 si les deux boules tirées sont de couleurs différentes et -2 sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$.

II Schéma de Bernoulli

Définition (épreuve de Bernoulli)
Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui n'a que deux issues, (appelées succès S et échec $\overline{S}$). Son paramètre est le nombre $p = P(S)$ ($p \in [0; 1]$).



Remarque
Le mot "succès" ne désigne pas forcément quelque chose de positif, cela peut être une pièce défectueuse dans un lot.
$\overline{S}$ est l'évènement contraire de S, donc sa probabilité est $1 - p$.

Définition (loi de Bernoulli)
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, où p désigne la probabilité du succès ($p \in [0; 1]$).
On a donc $P(X = 1) = p$, et $P(X = 0) = 1 - p$.

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Propriété
Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$, alors $E(X) = p$

Définition (schéma de Bernoulli)
Soit n un entier naturel non nul.
On parlera de « schéma de Bernoulli » lorsqu'on effectue une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques (c'est-à-dire de même paramètre p) et indépendantes.

Représentation
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit n un entier, $n \geqslant 1$.
Un schéma de Bernoulli associé à n répétitions de cette épreuve peut être représenté par un arbre pondéré qui comporte n niveaux.

Exercice 4
Un archer tire successivement 3 flèches. À chaque tir, la probabilité qu'il touche sa cible (S) est de 0.9.

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. On appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de tirs qui touchent la cible (nombre de succès).
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (b) Calculer $P(X = 0)$.
   (c) Calculer $P(X = 2)$.

III Coefficients binomiaux

Définition
Si n est un entier naturel et si k est un entier compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{k}$ et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre à n niveaux, associé à un schéma de Bernoulli. Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.

Ces nombres sont par construction toujours des entiers.
Sur l'exemple précédent, il y a 3 chemins qui conduisent à exactement un succès, donc $\binom{3}{1} = 3$.

Propriété (des cas particuliers)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

1. $\binom{n}{0} = 1$, et $\binom{n}{n} = 1$;
2. $\binom{n}{1} = n$, et $\binom{n}{n-1} = n$

Exercice 5
Calculer sans calculatrice.

$\binom{12}{1} =$ $\qquad$ $\binom{8}{8} =$ $\qquad$ $\binom{12}{0} =$ $\qquad$ $\binom{12}{11} =$

Remarque (Coefficients binomiaux avec la calculatrice)
Voici comment obtenir les coefficients binomiaux à la calculatrice.

	Casio	Texas	Numworks
Chemin	Opt PROB	Math Prob Combinaison	Outils Proba Dénombrement
$\binom{n}{k}$	`nCr`	`nCk`	$\binom{n}{k}$

Exercice 6
Vérifier que $\binom{8}{3} = 56$, puis déterminer $\binom{12}{3} =$ et $\binom{21}{10} =$

Propriété (Propriété des coefficients binomiaux)
- Symétrie.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,
  $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
- Formule du triangle de Pascal :
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geqslant 1)$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
  $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7								

Par exemple, $\binom{4}{2} = 6$, et $\binom{6}{3} = 20$.

Exercice 7
Compléter la ligne $n = 7$ du triangle de Pascal. Sans calculatrice, en déduire $\binom{7}{3}$.

$\binom{7}{3} =$

Remarque
Les coefficient binomiaux interviennent aussi dans la formule qui donne le développement de $(a+b)^n$:

pour tous réels a et b, et pour tout entier $n \geqslant 1$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple :
Pour tous réels a et b,
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$(a+b)^4 =$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

IV Loi binomiale

Définition
La loi binomiale de paramètres n et p, notée $B(n,p)$, est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Remarque
Si X suit la loi binomiale $B(n,p)$, alors les valeurs possibles de X sont 0 ;1 ;2… ;n.
En effet, sur un total de n épreuves, on peut obtenir de 0 à n succès.

Remarque
On a 3 conditions à vérifier pour justifer que X suit une loi binomiale :
- On répète n épreuves de Bernoulli (2 issues).
- Elles sont toutes identiques (même paramètre p pour le succès) et indépendantes.
- La variable X compte le nombre de succès.

Théorème (Expression de la loi binomiale)
Soient un entier naturel n et un réel p de l'intervalle $[0;1]$.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit la loi binomiale $B(n,p)$, avec pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration
Pour calculer $P(X=k)$, on fait la somme des probabilités des chemins qui réalisent exactement k succès (et donc $n-k$ échecs).
Chacun de ces chemins a pour probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$.
Il y a par définition $\binom{n}{k}$ chemins qui font k succès.
Donc $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Exercice 8
L'archer qui touche la cible avec une probabilité 0,9 tire 3 flèches. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois qu'il touche la cible.

1. Quelle sont les valeurs possibles de X ?
2. Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3$.
3. En déduire $P(X \geqslant 1)$, et $P(X<2)$.

IV.1 Espérance de la loi binomiale

Théorème (admis)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors, l'espérance de X est $E(X)=np$.

Cela correspond au nombre moyen de succès sur n répétitions lorsque le nombre de séries de n répétitions devient très grand.

Exercice 9
L'archer qui touche la cible avec une probailité 0,9 tire des séries de 20 flèches. En moyenne, combien de fois va-t-il toucher la cible par série de 20 flèches ?

IV.2 Utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale

	Casio	Texas	Numworks
Chemin	Opt Stat Dist Binomial	distrib	Outils Proba Lois Binomiale
$P(X=k)$	`BinomialPD(k,n,p)`	`binomFdP(n,p,k)`	`binompdf(k,n,p)`
$P(X \leqslant k)$	`BinomialCD(k,n,p)`	`binomFRep(n,p,k)`	`binomcdf(k,n,p)`

Exercice 10
L'archer qui touche la cible avec une probabilité 0,9 tire 20 flèches. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois qu'il touche la cible.

1. Calculer $P(X=18)$
2. Calculer $P(X \leqslant 18)$
3. Calculer $P(X<17)$.
4. Calculer $P(X>15)$.
5. Calculer $P(X \geqslant 18)$.

Remarque
On peut utiliser la calculatrice pour déterminer la loi d'une variable suivant une loi binomiale.
Exemple avec les paramètres $n=7$ et $p=0,2$. X suit $B(7;0,2)$

X	Y_1
0	0,21
1	0,367
2	0,276
3	0,115
4	0,029
5	0,004
6	3×10^{-4}
7	$1,3 \times 10^{-5}$