Exercices de préparation du second contrôle commun de 1re S

1 Probabilités, variable aléatoire

Exercice 1
Problèmes de synthèse du livre : n° 94 p 289, et n° 95 p 289 (le 95 a été corrigé en classe).

Exercice 2
On considère le jeu suivant :
le joueur place une mise de n euros sur la table, n étant un entier naturel non nul.
Puis il tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Si la carte tirée est :

- un as, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise au carré.
- un roi, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise plus huit euros.
- une dame ou un valet, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise.

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.
On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, en tenant compte de sa mise au départ.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$ en fonction de n.
4. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles le jeu est équitable ?
5. Pour quelles valeurs de n le joueur peut-il espérer gagner en moyenne au moins deux fois sa mise s'il joue un grand nombre de fois ?

Exercice 3
Un sac contient un jeton rouge, 3 jetons blancs, et n jetons noirs (n entier, $n \geqslant 1$).
Un joueur mise m euros, (m entier, $m \geqslant 1$), puis tire un jeton du sac.
Tous les jetons ont la même probabilité d'être choisis.
S'il tire le jeton rouge, il gagne 10 euros.
S'il tire un jeton blanc, il gagne 5 euros.
Si le jeton tiré est noir, il ne gagne rien.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain du joueur, c'est-à-dire la somme gagnée diminuée de sa mise.

1. (a) On prend $m = 1$ dans cette question.
   Combien de jetons noirs n faut-il mettre dans l'urne pour que le jeu soit équitable ?
   (b) On prend $n = 16$.
   Existe-t-il une valeur de m pour laquelle le jeu soit équitable ?
2. (a) De façon générale, exprimer l'espérance de gain $E(X)$ du joueur en fonction de n et m.
   (b) Comment choisir n et m pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 4
Les deux frères Bola, Tim et Tom, ont chacun organisé une tombola.
Tim propose 100 billets, dont 30 gagnants répartis comme suit :
— 1 lot de 250 euros,
— 4 lots de 50 euros,
— 25 lots de 2 euros.
Tom propose également 100 billets, dont les gagnants sont répartis comme suit :
— 5 lots de 20 euros,
— 10 lots de 15 euros,
— 15 lots de 10 euros,
— 20 lots de 5 euros.
Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 euros.
Soient respectivement X et Y les gains algébriques liés à l'achat d'un billet chez Tim et Tom.

1. Variable aléatoire X.
   (a) Justifier que $P(X = -5)$ est égal à $0,7$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Variable aléatoire Y.
   On donne partiellement la loi de probabilité de Y ci-dessous :

y_i	-5	0	5	10	15
$P(Y = y_i)$	...	0,2	0,15	0,1	0,05

Compléter la loi de probabilité de Y. Justifier.

3. Pour chaque tombola calculer la probabilité de gagner au moins 5 euros.
4. Calculer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X et Y. Comparer et interpréter.
5. Calculer la variance et l'écart-type de chacune des variables aléatoires X et Y. Que pourrait-on conseiller à Eva, qui hésite entre Tim et Tom, sachant qu'elle n'a pas le goût du risque ?

Exercice 5 (facultatif, à la limite du programme du devoir commun)

Une urne contient 5 boules noires et 2 boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. À tout moment, chacune des boules a la même probabilité d'être choisie.

1. Dans cette question, on suppose que l'on effectue 2 tirages successifs d'une boule dans l'urne. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est $\dfrac{24}{49}$.
2. On suppose désormais que l'on effectue n tirages ($n \geqslant 1$), et l'on note p_n la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche sur les n tirages.
   (a) Justifier que $p_n = 1 - \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = \dfrac{2 \times 5^n}{7^{n+1}}$.
   (c) Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la suite (p_n) ?
   (d) (Question bonus)
      i. Écrire un algorithme qui permette de trouver le plus petit entier n_0 tel que $p_{n_0} \geqslant 0,999$.
      ii. Programmer cet algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.
      iii. Interpréter le résultat précédent par une phrase.

2 Dérivation, application de la dérivation

Exercice 6 (ex 2 fiche polycopiée)
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

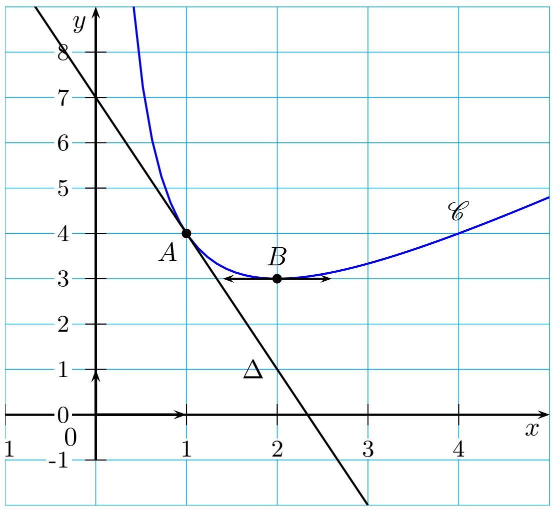
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$.
3. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. On considère la droite Δ d'équation $y = x + 2$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
6. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans un même repère orthonormé.
7. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -3. Donner alors une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 7
Démontrer que pour tout $x > \dfrac{2}{3}$, on a $\dfrac{x^3}{3x-2} \geqslant 1$.
Indication : on pourra étudier une fonction.

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Déterminer et construire le tableau de variation de f sur $[-2; 4]$.
   (c) En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-2; 4]$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1.
3. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - (-12x + 2) = (x-1)(x^2 - 2x + 1).$$
   (b) Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.
4. Existe-t-il des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Dans l'affirmative préciser les coordonnées de ces points.

Exercice 9
Le graphique ci-dessous donne la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La tangente au point B à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



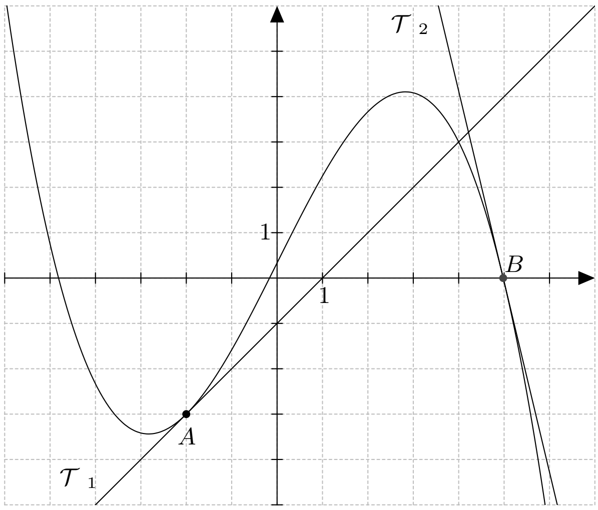
1. Lire graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer à l'aide du graphique, mais en justifiant, les valeurs de $f'(1)$ et $f'(2)$.
3. Déterminer une équation de la droite Δ.
4. On admet désormais que pour tout $x > 0$, $f(x)$ a une expression de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{4}{x}$.

(a) En s'aidant des résultats des questions 1. et 2., déterminer a et b et donner l'expression de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

(b) Calculer alors $f'(x)$.

(c) Retrouver par le calcul les résultats de la question 2.

Exercice 10



La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer graphiquement $f(-2)$ et $f(5)$.
2. Les droites $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, sont tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ respectivement en A et en B. En déduire deux nombres dérivés.
3. On sait que $f'(4) = -2$. Tracer la tangente $\mathcal{T}_3$ à $\mathcal{C}$ que l'on peut en déduire.

Exercice 11
Soit f la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Justifiez que f est dérivable sur $]3;+\infty[$, puis calculer $f'(x)$.
2. Justifier que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 a pour équation $y = -2x + 10$.
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$.
4. Soit (d) la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$. Montrer que la courbe de f admet une unique tangente T' parallèle à (d), et préciser les coordonnées du point de contact de $\mathcal{C}$ avec T'.

Exercice 12
Préciser les ensembles de définition des fonctions f et g ci-dessous, puis calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

1. f est définie par $f(x) = x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - 6x + 1$.
2. g est définie par $g(x) = \dfrac{1-4x}{3x-2}$.

Exercice 13
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (2x-6)\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{3x-3}{\sqrt{x}}$.
2. Étudier les variations de f sur $\left[\dfrac{1}{2};100\right]$ et dresser son tableau de variation.

3 Suites arithmétiques et suites géométriques

Exercice 14
Calculer les sommes suivantes (en justifiant le résultat) :

1. $A = 7 + 10 + 13 + \cdots + 304 + 307$.
2. $B = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$.

Exercice 15
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{4}u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par
$$v_n = u_n - 4.$$
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Indication : on aura trouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 2 \times (-0.25)^n + 4.$$
4. Pour tout $n \geqslant 0$, on note S_n et S'_n les sommes suivantes :
$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $S'_n = \dfrac{8}{5}\left[1 - (-0.25)^{n+1}\right] + 4n + 4$.

Exercice 16

Une entreprise emprunte 2 000 000 € à une banque, à rembourser par mensualités sur 10 ans.

Partie A
Dans la première formule proposée par la banque, l'entreprise rembourse 8000 € lors de la première mensualité, puis chaque mensualité suivante augmente de
300 €. On appelle u_1 la première mensualité et u_{120} la dernière.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Reconnaître la nature de la suite (u_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise.

Partie B
La banque propose une deuxième formule à l'entreprise : on appelle v_1 le premier versement, à déterminer. Chaque mensualité augmente de 1 % par rapport à la précédente, jusqu'à v_{120}.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Reconnaître la nature de la suite (v_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer v_n en fonction de n et de v_1.
3. Exprimer le versement total en 10 ans en fonction de v_1 (On donnera une valeur exacte).
4. Que doit valoir v_1 pour que le versement total soit de 3 000 000 € seulement ? on arrondira au centime près.

Partie C
Revenant à une formule du type de la première, l'entreprise souhaite verser
15000 € à la première mensualité, augmenter ensuite de 500 € par mois, mais cesser les versements dès que le total excède 2 500 000 €. On appelle w_1 le premier versement, et w_n le versement du $n^{\text{ième}}$ mois.

1. Exprimer la somme totale versée par l'entreprise en fonction de n.

2. Pour répondre à son souhait, au bout de combien de temps l'entreprise aura-t-elle terminé ses remboursements ?

Exercice 17
Le salaire de Monique est de 1600 euros en janvier 2013. Chaque mois il augmente de 9 euros.
On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2013, v_1 le salaire du mois de février 2013 et v_n le salaire du mois de rang $n+1$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. A quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
4. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2013 à décembre 2023 inclus ?

Exercice 18
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$.

1. Montrer que (u_n) n'est pas arithmétique.
2. (v_n) est définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. (v_n) est-elle arithmétique ?
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
5. Démontrer que pour tout entier n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 19
Lucas lâche une balle d'une hauteur de 24 m. Lorsque la balle rebondit, la hauteur de son rebond perd 10% par rapport à la hauteur du rebond précédent. On pose $u_0 = 24$ et l'on note u_n la hauteur du n^{e} rebond.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. On estime que la balle ne rebondit plus lorsque le rebond est inférieur à 1 cm.
   Combien de rebonds a fait la balle ?
4. Quelle est alors la distance parcourue par la balle pendant ces p rebonds ?

Exercice 20

1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est $0,375\,375\,375\ldots$ où 375 est répété indéfiniment. Est-il rationnel ?
2. On considère la suite définie par $v_1 = 0,375$ et, pour tout entier n, $v_{n+1} = 10^{-3}v_n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (v_n).
   (b) Donner l'écriture décimale de v_2, v_3 et $v_1 + v_2 + v_3$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
   (d) Conjecturer la limite de 10^{-3n} lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que représente ce nombre par rapport à B ?

4 Trigonométrie (pas d'angles orientés de vecteurs)

Exercice 21
Soit x un nombre réel. Exprimer en fonction de $\sin x$ et/ou de $\cos x$ les nombres suivants :
$A(x) = 3\sin(\pi + x) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(-x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
$B(x) = 2\cos(-x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\cos(-x)$.

Exercice 22
Soit t le réel tel que $\sin t = \frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$. M est le point associé à t sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

1. Placer M sur $\mathcal{C}$.
2. Calculer $\cos t$.
3. Placer sur $\mathcal{C}$ les points associés N, P, Q et R les points respectivement associés aux réels $-t$, $\pi - t$ et $\frac{\pi}{2} + t$, puis donner les valeurs de $\sin(-t)$, $\sin(\pi - t)$ $\cos(\frac{\pi}{2} + t)$, $\sin(\frac{\pi}{2} + t)$.

Exercice 23
Résoudre l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 4\pi]$.

Exercice 24
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$, puis donner ses solutions dans $[0; 2\pi[$.

Exercice 25

1. Résoudre dans $[-\pi; 2\pi]$ l'équation $2\sin^2 x - \sin x = 0$.
2. (a) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $6 - 12\cos x = 0$. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

   (b) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $6 - 12\cos x \geqslant 0$. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.