1re G
Correction du dm1

Exercice 1

Mettre les fonctions suivantes sous forme canonique, puis en déduire le tableau de variation. Justifier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 1$
   Les coefficients sont $a = 1$, $b = -6$, et $c = 1$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$.
   $\beta = f(\alpha) = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1 = -8$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)^2 - 8$.
   Tableau de variation.
   Le sommet est $S(3; -8)$. Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Donc

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-8	↗	

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -5x^2 + x + 9$.
   Les coefficients sont $a = -5$, $b = 1$, et $c = 9$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-1}{-10} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.
   $\beta = f(\alpha)$ ou bien $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 5 \times 9 = 181$.
   $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-181}{-20} = \dfrac{181}{20} = 9,05$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{10}\right)^2 + \dfrac{181}{20}$.
   Tableau de variation.
   Le sommet est $S(0,1; 9,05)$. Comme $a = -5 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. Donc

x	$-\infty$		$0,1$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$9,05$	↘	

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 4x^2 + x - 7$
   Les coefficients sont $a = 4$, $b = 1$, et $c = -7$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{8} = -0,125$.
   $\beta = f(\alpha) = f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{8}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{8}\right) - 7$
   $\beta = \dfrac{1}{16} - \dfrac{2}{16} - \dfrac{7 \times 16}{16} = \dfrac{-1 - 112}{16} = -\dfrac{113}{16}$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{8}\right)^2 - \dfrac{113}{16}$.
   Tableau de variation.
   Le sommet est $S\left(-\dfrac{1}{8}; -\dfrac{113}{16}\right)$. Comme $a = 4 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Donc

x	$-\infty$		$-1/8$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-113/16$	↗	

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x + 1)^2 + 3$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $-(x - 1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = -x^2 - 2x + 2 = f(x)$.
   Donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x + 1)^2 + 3$.
2. En reconnaissant dans l'expression précédente la forme canonique d'une fonction du second degré, dresser le tableau de variation de f. Justifier.
   On reconnaît la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = -1$, et $\beta = 3$.

La parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$, et a pour sommet le point $S(-1; 3)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

3. Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.

(a) Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d).

Pour la droite d, il suffit de déterminer les coordonnées de 2 points.

x	0	2
$-x-4$	-4	-6

Pour la courbe de f, on obtient à l'aide de la calculatrice :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6	-13

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x).$$

D'une part,
$f(x) - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 6$.
D'autre part, en développant,
$(x+3)(2-x) = -x^2 - x + 6$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.

(c) En déduire le tableau de signe de $f(x) - (-x-4)$, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (d). On vérifiera la cohérence de ce résultat avec la graphique.

On étudie le signe de $f(x) - (-x-4)$ à partir de la forme factorisée qui est $(x+3)(2-x)$.
Valeurs clés :
$x + 3 = 0$ ssi $x = -3$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(-x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < -x - 4$.
Donc sur $]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
Lorsque $x \in]-3; 2[$, $f(x) > -x - 4$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d) sur $]-3; 2[$.
Enfin $f(x) = -x - 4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc $\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2.
Tous ces résultats sont bien cohérents avec le graphique.