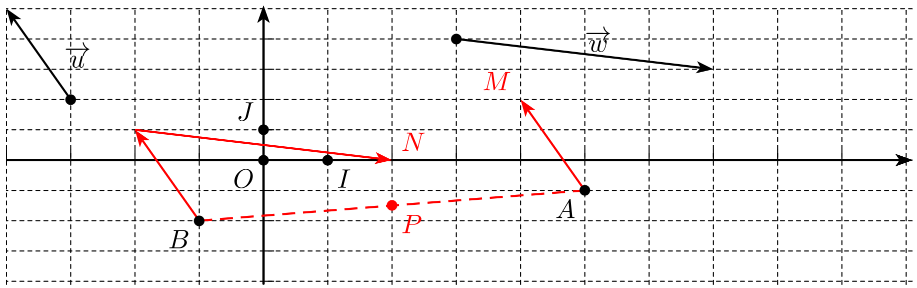
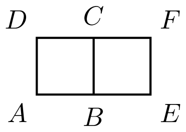
Seconde. Correction du contrôle de mathématiques n° 4
Sujet 1

Exercice 1 (4 points)
On se place dans un repère $(O; I; J)$. On fera apparaître les traits de construction.

1. Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
   $\boxed{\overrightarrow{u}(-1;3) \text{ et } \overrightarrow{w}(4;-1).}$
2. Construire le point M image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
3. Construire le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$.
4. Construire le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA}$. $\boxed{\text{Donc } P \text{ est le milieu de } [AB].}$



Exercice 2 (2 points)
$ABCD$ et $BEFC$ sont deux carrés.



1. $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$
2. $\boxed{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}}$

Exercice 3 (6 points)

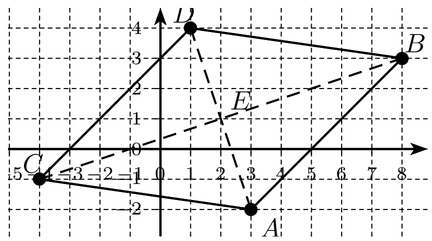
1. Écrire $E = 6^7 \times 12^{-1}$ sous la forme $2^n \times 3^k$ avec $n, k \in \mathbb{Z}$.
   $E = 6^7 \times 12^{-1} = (2\times 3)^7 \times (2^2 \times 3)^{-1} = 2^7 \times 3^7 \times 2^{-2} \times 3^{-1}$.
   $\boxed{E = 2^{7-2} \times 3^{7-1} = 2^5 \times 3^6.}$
2. Calculer $F = \dfrac{16 \times 10^{11} \times 21 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}}$ et donner le résultat en notation scientifique.
   $F = \dfrac{16 \times 10^{11} \times 21 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}} = \dfrac{16 \times 21}{6} \times 10^{11+3-(-3)}$
   $\boxed{F = \dfrac{2 \times 8 \times 3 \times 7}{2 \times 3} \times 10^{17} = 56 \times 10^{17} = 5,6 \times 10^{18}}$
3. Déterminer l'écriture simplifiée de $G = \sqrt{45} - 4\sqrt{5} + \sqrt{20}$.
   $G = \sqrt{9 \times 5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5}$
   $\boxed{G = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.}$

Exercice 4 (3 points)
Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 6\sqrt{3}$ cm et $AC = \sqrt{15}$ cm.

1. Calculer la longueur BC du segment $[BC]$. Donner la valeur exacte.
   D'après le théorème de Pythagore,
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (6\sqrt{3})^2 + \sqrt{15}^2$
   $BC^2 = 6^2 \times 3 + 15 = 3 \times 36 + 15 = 123.$ $\boxed{\text{Donc } BC = \sqrt{123}.}$
2. Calculer l'aire du triangle ABC (valeur exacte et arrondie au mm^2).
   $Aire = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} \times \sqrt{15}}{2}$
   $Aire = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = 3 \times 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5} \approx 20,12.$
   $\boxed{\text{L'aire du triangle est } 9\sqrt{5} \text{ cm}^2\text{, soit environ 20,12 cm}^2\text{, ou 2021 mm}^2\text{).}}$

Exercice 5 (5 points)

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(3;-2)$, $B(8;3)$, $C(-4,-1)$, et $D(1;4)$.



2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8-3 \\ 3+2 \end{pmatrix}$, $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.}$
3. Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme. Justifier.
   $ABDC$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},\ ABDC \text{ est un parallélogramme.}}$
4. Calculer la longueur AB.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
   $\boxed{AB = \sqrt{(8-3)^2 + (3+2)^2)} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.}$
5. $ABDC$ est-il un losange ? Justifier avec précision.
   Comme $ABDC$ est un parallélogramme, $ABDC$ est un losange ssi il a deux côtés consécutifs de même longueur.

On sait déjà que $AB = 5\sqrt{2}$.
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Donc $AB = AC$.

Comme le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme et qu'il a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange.

Exercice 6 (bonus, 1 point)
Écrire sans racine carrée au dénominateur $\dfrac{3}{4-\sqrt{5}}$. Justifier.

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée de $4-\sqrt{5}$ qui est $4+\sqrt{5}$.

$$\boxed{\frac{3}{4-\sqrt{5}} = \frac{3(4+\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})} = \frac{12+3\sqrt{5}}{4^2-5} = \frac{12+3\sqrt{5}}{11}.}$$

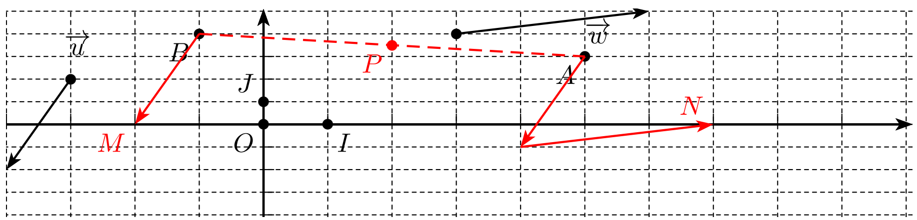
Exercice 7 (bonus, 1 point)
Montrer que, quelle que soit la valeur de l'entier n, $\dfrac{8^n \times 10}{2^{n+1} \times 4^n} = 5$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ \frac{8^n \times 10}{2^{n+1} \times 4^n} = \frac{8^n \times 10}{2 \times 2^n \times 4^n} = \frac{10}{2} \times \frac{8^n}{8^n} = 5.}$$

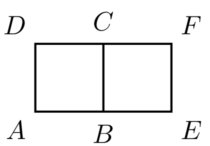
Réponses non détaillées du sujet 2

Exercice 8 (4 points)

1. Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
$\boxed{\vec{u}(-1,-4) \text{ et } \vec{w}(3;1).}$
2. Construire le point M image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Construire le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \vec{u} + \vec{w}$.
4. Construire le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA}$. $\boxed{P \text{ est le milieu de } [AB].}$



Exercice 9 (2 points)
$ABCD$ et $BEFC$ sont deux carrés.



1. $\boxed{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}}$
2. $\boxed{\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FE}}$

Exercice 10 (6 points)
Le détail des calculs doit figurer sur la copie.

1. Écrire $E = 18^4 \times 12^{-3}$ sous la forme $2^n \times 3^k$ avec $n, k \in \mathbb{Z}$.
$E = 18^4 \times 12^{-3} = (2 \times 3^2)^4 \times (2^2 \times 3)^{-3} = 2^{4-2\times3} \times 3^{2\times4-3}$
$\boxed{E = 2^{-2} \times 3^5}$
2. Calculer $F = \dfrac{55 \times 10^{-5} \times 36 \times 10^4}{15 \times 10^{17}}$ et donner le résultat en notation scientifique.
$F = \dfrac{55 \times 36}{15} \times 10^{-5+4-17} = \dfrac{5 \times 11 \times 3 \times 12}{5 \times 3} \times 10^{-18}$
$\boxed{F = 132 \times 10^{-18} = 1,32 \times 10^{-16}}$
3. Déterminer l'écriture simplifiée de $G = \sqrt{300} - 7\sqrt{3} + \sqrt{12}$.
$\boxed{G = \sqrt{100} \times \sqrt{3} - 7\sqrt{7} + \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.}$

Exercice 11 (3 points)
Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 2\sqrt{5}$ cm et $AC = \sqrt{15}$ cm.

1. Calculer la longueur BC du segment $[BC]$. Donner la valeur exacte.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 20 + 15 = 35$.
Donc $\boxed{BC = \sqrt{35}.}$
2. Calculer l'aire du triangle ABC (valeur exacte et valeur arrondie au mm^2).
$Aire = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$.

L'aire du triangle est de $5\sqrt{3}$ cm^2, soit environ 8,66 cm^2, ou 866 mm^2.

Exercice 12 (5 points)

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-4;-6)$, $B(8;-2)$, $C(6;4)$, et $D(-6;0)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. $\boxed{\overrightarrow{AB}(12;4).}$
3. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme. Justifier.
On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$. On trouve $\overrightarrow{DC}(12;4)$.
$\boxed{\text{Comme } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},\ ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$
4. Calculer la longueur AC. $\boxed{AC = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.}$
5. $ABCD$ est-il un rectangle ? Justifier avec précision.
On calcule BD, on trouve $BD = 10\sqrt{2}$. Donc $AC = BD$.

Comme $ABCD$ est un parallélogramme avec les diagonales de même longueur, $ABCD$ est un rectangle.