

Exercice 1 (commun à tous les candidats, 1 point)

Restitution organisée de connaissances :

1. Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\text{pour tout } x > 0, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. En déduire la démonstration de la propriété suivante :

$$\text{Pour tout réel } q > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

Pour cet exercice, voir le cahier de cours ou le livre pages 12 et 18.

Exercice 2 (commun à tous les candidats, 4,5 points)

L'objectif de l'exercice est d'approcher l'intégrale $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

Partie 1

1. Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$, $x^2 + 1 \leq e^{x^2}$.

Indication : étudier la fonction g définie par $g(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ sur $[0; 1]$.

La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^{x^2}$ aussi.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables.

$$g'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1).$$

Sur l'intervalle $[0; 1]$, $2x \geq 0$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $[0; 1]$, et $x^2 \geq 0$, on en déduit que $e^{x^2} \geq e^0 = 1$, soit $e^{x^2} - 1 \geq 0$ sur $[0; 1]$.

Donc pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) \geq 0$.

La fonction g est croissante sur $[0; 1]$.

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$$

Donc pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$.

$$\text{Pour tout } x \in [0; 1], x^2 + 1 \leq e^{x^2}.$$

2. Comparer x et x^2 sur $[0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.

$$\text{Donc pour tout } x \in [0; 1], x^2 \leq x \text{ (avec égalité pour } x = 0 \text{ et } x = 1).$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{x^2} \leq e^x$.

En appliquant la fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$ dans l'inégalité précédente, on a :

$$\text{pour tout } x \in [0; 1], e^{x^2} \leq e^x.$$

4. Déduire des questions précédentes un encadrement de $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$

Pour tout $x \in [0; 1]$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 + 1 & \leq & e^{x^2} & \leq & e^x \\ \int_0^1 x^2 + 1 \, dx & \leq & \int_0^1 e^{x^2} \, dx & \leq & \int_0^1 e^x \, dx \\ \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 & \leq & I & \leq & [e^x]_0^1 \\ \frac{4}{3} & \leq & I & \leq & e - 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc } \frac{1}{3} \leq I \leq e - 1}$$

Partie 2

On souhaite obtenir un encadrement de I à partir de la méthode des rectangles.

Pour tout $x \in [0; 1]$, on note $f(x) = e^{x^2}$.

1. Justifier que f est croissante sur $[0; 1]$.

f est dérivable sur $[0; 1]$ et $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

$e^{x^2} > 0$, et $2x \geq 0$ lorsque $x \in [0; 1]$.

Donc $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; 1]$.

f est croissante sur $[0; 1]$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ \text{et} \\ v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

On admet que pour tout $n \geq 1$; $u_n \leq I \leq v_n$.

- (a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $v_n - u_n = \frac{e - 1}{n}$.

Par télescopage on a :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= \frac{e}{n} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{e - 1}{n} \end{aligned}$$

- (b) En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(v_n - u_n)$.

$e - 1 > 0$ donc $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0.

- (c) On rappelle l'algorithme de la méthode des rectangles avec l'entier n en entrée.

- i. Soit p un entier, $p \geq 1$.

On cherche à obtenir en sortie un encadrement de I d'amplitude inférieure à 10^{-p} .

Recopier et modifier l'algorithme pour que, l'entier p étant donné en entrée, il détermine la plus petite valeur de n pour laquelle $v_n - u_n < 10^{-p}$ puis applique la méthode des rectangles avec cette valeur de n et affiche en sortie n , u_n et v_n .

Indication : les instructions à modifier ou compléter sont marquées par le symbole (*).

```

DÉBUT
Entrer la fonction  $f$ .
Entrer  $a, b$ .
Entrer  $p$ .
 $n$  prend la valeur 1.
Tant que  $\frac{e-1}{n} \geq 10^{-p}$ , faire
     $n$  prend la valeur  $n + 1$ 
Fin Tant que
 $U$  prend la valeur 0.
 $V$  prend la valeur 0.
 $x$  prend la valeur  $a$ .
Pour  $k$  allant de 0 à  $(n-1)$ , faire
     $U$  prend la valeur  $U + \frac{b-a}{n} \times f(x)$ .
     $x$  prend la valeur  $x + \frac{b-a}{n}$ .
     $V$  prend la valeur  $V + \frac{b-a}{n} \times f(x)$ .
Fin pour.
Afficher  $n, U$  et  $V$ .
FIN

```

- ii. Programmer cet algorithme à la calculatrice et le tester avec $p = 2$.
Donner la valeur de n et l'encadrement de I obtenu.

On trouve $n = 172$, et en arrondissant, $1,4576 \leq I \leq 1,4677$.

Exercice 3 (commun à tous les candidats, 4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On considère les points B $(100 ; 100)$ et C $(50 ; \frac{50}{\sqrt{e}})$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = xe^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ .

1. (a) Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$B(100; 100) \in \Gamma \iff 100 = f(100) \iff 100 = 100e^{100a+b} \iff 1 = e^{100a+b} \iff 0 = 100a + b$$

$$C\left(50 ; \frac{50}{\sqrt{e}}\right) \iff \frac{50}{\sqrt{e}} = f(50) \iff \frac{50}{\sqrt{e}} = 50e^{50a+b} \iff e^{-\frac{1}{2}} = e^{50a+b} \iff 50a + b = -\frac{1}{2}$$

Le couple $(a ; b)$ est donc solution du système : $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- (b) En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} 100a + b = 0 \\ 100a + 2b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 100a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 100a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0,01 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,01x - 1 = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ d'où par composée } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,01x-1} = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. (a) Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

Pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1} = 100 \times 0,01xe^{0,01x}e^{-1} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

- (b) En déduire la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,01x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0.$$

D'où, par composée et produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

4. Étudier les variations de la fonction f . On donnera le tableau de variations complet.

La fonction $x \mapsto 0,01x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composée avec la fonction exponentielle, $x \mapsto e^{0,01x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a : $f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times 0,01e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}$.

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, $e^{0,01x-1} > 0$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.

$0,01x + 1 = 0$ lorsque $x = -100$.

$$f(-100) = -100e^{-2} = -\frac{100}{e^2} \approx -13,5.$$

x	$-\infty$	-100	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-100e^{-2}$	$+\infty$

5. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

Pour tout x réel on a : $f(x) - x = x(e^{0,01x-1} - 1)$.

Avec $e^{0,01x-1} - 1 \geq 0 \iff e^{0,01x-1} \geq 1 \iff e^{0,01x-1} \geq e^0 \iff 0,01x - 1 \geq 0 \iff x \geq 100$.

On peut donc établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	100	$+\infty$	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$e^{0,01x-1} - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	0	$+$

La courbe Γ est donc au-dessus de la droite (D) sur $] -\infty ; 0[\cup] 100 ; +\infty [$ et en-dessous sur l'intervalle $] 0 ; +100 [$.

6. (a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = 100e^{0,01x-1}(x - 100)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On a vu que $x \mapsto e^{0,01x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par produit de fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 100 \times [0,01e^{0,01x-1} \times (x - 100) + e^{0,01x-1} \times 1] \\ &= e^{0,01x-1}(x - 100 + 100) \\ &= xe^{0,01x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- (b) Calculer l'intégrale $\int_0^{100} f(t) dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^{100} f(t) dt &= F(100) - F(0) \\ &= 100e^0(100 - 100) - 100e^{-1}(0 - 100) \\ &= 0 + 10\,000e^{-1} \\ &= \frac{10\,000}{e} \end{aligned}$$

- (c) On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ .

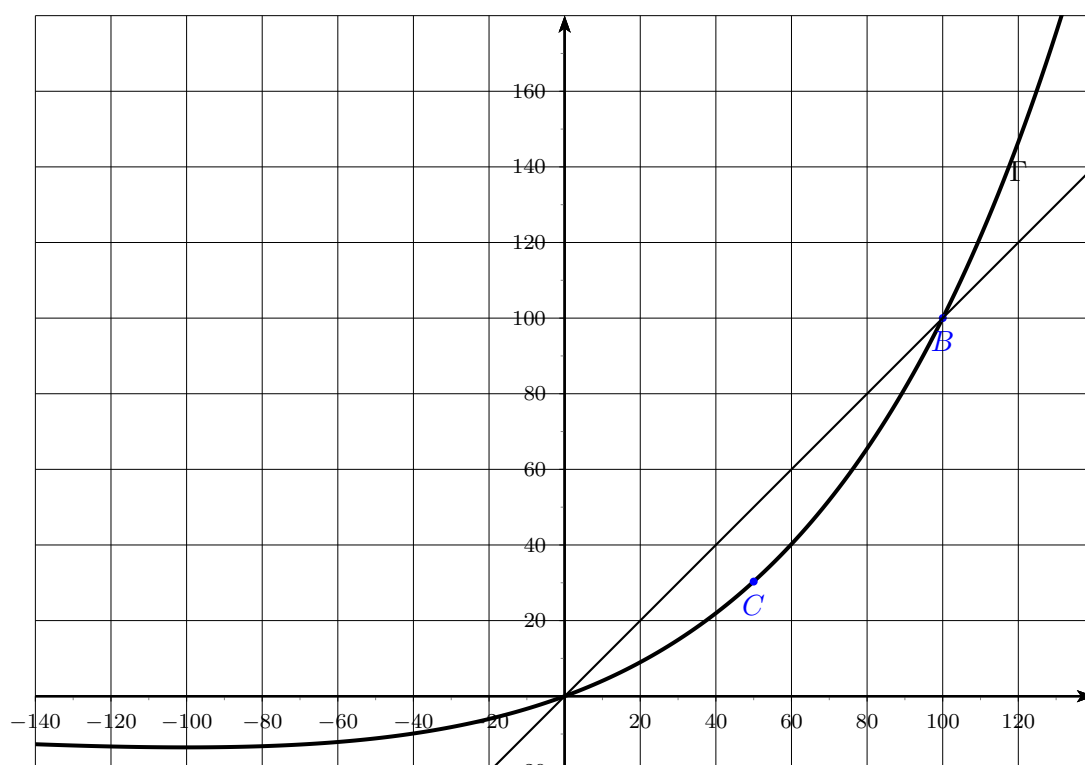
Calculer A.

On a vu que sur l'intervalle $[0; 100]$, $x \geq f(x)$ (D est au-dessus de Γ).

Donc l'aire A comprise entre D et Γ s'obtient par soustraction d'intégrales.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{100} (t - f(t)) \, dt \\
 &= \int_0^{100} t \, dt - \int_0^{100} f(t) \, dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{100} - \frac{10\,000}{e} \\
 &= \frac{10\,000}{2} - \frac{10\,000}{e} \\
 &= 5\,000 - \frac{10\,000}{e}
 \end{aligned}$$

$A = 5\,000 - \frac{10\,000}{e}$, soit environ 1321.



Exercice 4 (commun à tous les candidats, 5 points)**Les parties A et B sont indépendantes**

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A :

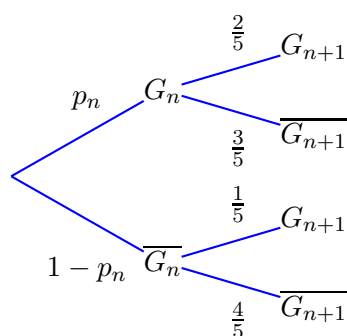
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

Il est clair que G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= p(G_{n+1}) \\
 &= p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\
 &= \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) \\
 &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

- (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

Pour tout n entier naturel non nul,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{5}u_n.$$

L'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$ montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Son premier terme est $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 :

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Comme $u_n = p_n - \frac{1}{4}$, soit $p_n = u_n + \frac{1}{4}$, on a finalement :

$$\text{Pour tout } n \geq 1, p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

- (c) Déterminer la limite de p_n .

$$\text{Comme } \left|\frac{1}{5}\right| < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0.$$

$$\text{Il en résulte que } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4}.$$

- (d) Déterminer par le calcul la plus petite valeur de n telle que $p_n - \frac{1}{4} < 10^{-6}$.

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &< 10^{-6} \\ \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} &< 10^{-6} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} &< \frac{4}{3} \times 10^{-6} \\ \ln \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} &< \ln \left(\frac{4}{3} \times 10^{-6}\right) \\ (n-1) \ln \left(\frac{1}{5}\right) &< \ln \left(\frac{4}{3} \times 10^{-6}\right) \\ n &> \frac{\ln \left(\frac{4}{3} \times 10^{-6}\right)}{\ln \left(\frac{1}{5}\right)} + 1 \approx 9,4 \end{aligned}$$

Attention, $\ln \left(\frac{1}{5}\right) < 0$ car $\frac{1}{5} < 1$. On a changé le sens de l'inégalité.

$$\text{Le plus petit entier } n \text{ tel que } p_n - \frac{1}{4} < 10^{-6} \text{ est } n = 10.$$

Remarque : on montrerait facilement que (p_n) est décroissante. L'inégalité $p_n - \frac{1}{4} < 10^{-6}$ donc est vraie pour tout entier $n \geq 10$.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

Les épreuves étant identiques et indépendantes, et X étant la variable aléatoire comptant le nombre de succès, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

2. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \frac{3^{10}}{4^{10}} \approx 0,943 \approx 0,94, \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Exercice 5 (pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques, 5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
 f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $] -1 ; +\infty[$.
 $f = u - \frac{\ln v}{v}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$f' = u' - \left(\frac{\ln v}{v}\right)' = u' - \frac{\frac{v'}{v} \times v - v' \ln v}{v^2} = u' - \frac{1 - v' \ln v}{v^2}.$$

Par conséquent, pour tout x de $] -1 ; +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

2. Pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $] -1 ; +\infty[$.

Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f .

N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x > -1, N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}.$$

Comme x appartient à $] -1 ; +\infty[$, $1+x > 0$.

Le numérateur est positif comme somme de nombres strictement positifs.

Par conséquent, $N'(x) > 0$ pour tout $x > -1$.

On en déduit que N est croissante sur $] -1 ; +\infty[$.

$N(0) = 0$ donc $N(x) < 0$ pour tout x de $] -1 ; 0[$ et $N(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Or, $f'(x) = \frac{N(x)}{(1+x)^2}$ est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout x .

Par conséquent, $f'(x) < 0$ sur $] -1 ; 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$ $\nearrow$ 0		

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$, on résout l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Comme $f(0) = 0$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ se coupent à l'origine.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) \in [0 ; 4]$.

Sur l'intervalle $[0 ; 4]$, f est croissante donc pour tout x de $[0 ; 4]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$.

Or $f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \frac{\ln 5}{5} < 4$.

Donc pour tout $x \in [0; 4]$, $f(x) \in [0 ; 4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \text{ et} \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (a) Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

Voir graphique.

- (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0 ; 4]$.

Montrons par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; 4]$.

- *Initialisation* :

$u_0 = 4$. Donc $u_0 \in [0 ; 4]$.

- *Hérédité* :

Soit $k \geq 0$.

Supposons que $u_k \in [0 ; 4]$. Alors $u_{k+1} = f(u_k) \in [0 ; 4]$ d'après 1.

- *Conclusion*

Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0 ; 4]$.

- (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leq 0$ car $1+u_n \geq 1$ d'où $\ln(1+u_n) \geq 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

On peut aussi raisonner par récurrence en utilisant le fait que f est croissante sur $[0; 4]$ et $u_1 < u_0$.

- (d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente vers un réel ℓ .

- (e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ .

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

On en déduit que $\ell = 0$.

