2de. Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1

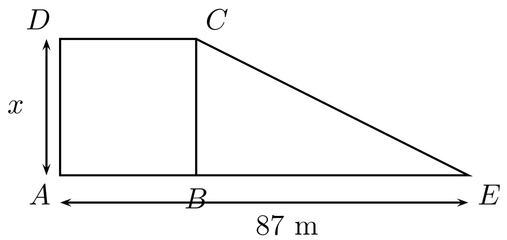
1. Effectuer les calculs suivants :
   $A = 123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2$. $\qquad B = 58^2 - 57^2 - 56^2 + 55^2 \qquad C = 87^2 - 86^2 - 85^2 + 84^2$
   $\boxed{\text{On obtient } A = B = C = 4.}$
2. Énoncer une conjecture et la démontrer.
   Conjecture : il semble que pour tout nombre réel x, $x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 = 4$.
   Démonstration.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 &= x^2 - (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 6x + 9) \\ &= x^2 - x^2 + 2x - 1 - x^2 + 4x - 4 + x^2 - 6x + 9 \\ &= -1 - 4 + 9 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 = 4.}$

Exercice 2

Pour quelle valeur de x l'aire du carré $ABCD$ est-elle égale à l'aire du triangle BEC ? Justifier.



L'aire du carré $ABCD$ est $f(x) = x^2$.
L'aire du triangle BEC rectangle en B est $g(x) = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{BE \times BC}{2} = \dfrac{(87-x)x}{2}$.
Le carré et le triangle ont la même aire ssi $f(x) = g(x)$.
D'où $x^2 = \dfrac{(87-x)x}{2}$ ssi $2x^2 = 87x - x^2$ ssi $3x^2 - 87x = 0$ ssi $x(3x - 87) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $3x - 87 = 0$) ssi ($x = 0$ ou $x = 29$). D'après le contexte, on ne garde pas la solution $x = 0$.
$\boxed{\text{Le carré } ABCD \text{ et le triangle } BEC \text{ ont la même aire lorsque } x = 29 \text{ m.}}$

Exercice 3

Soit $f(x) = x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3)$.

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3) \\ &= x^2 - 16 - [-6x^2 + 9x - 24x + 36] \\ &= x^2 - 16 - (-6x^2 - 15x + 36) \\ &= x^2 - 16 + 6x^2 + 15x - 36 \\ &= 7x^2 + 15x - 52 \end{aligned}$$

2. Montrer que $f(x) = (x + 4)(7x - 13)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3) \\ &= (x + 4)(x - 4) - 3(x + 4)(-2x + 3) \\ &= (x + 4)[(x - 4) - 3(-2x + 3)] \\ &= (x + 4)(x - 4 + 6x - 9) \\ &= (x + 4)(7x - 13) \end{aligned}$$

   On pouvait aussi développer $(x+4)(7x-13)$ pour retrouver la forme de $f(x)$ développée obtenue à la question 1.

3. Calculer $f(-4)$.
   $f(-4) = (-4+4) \times (7 \times 4 - 13) = 0 \times 15 = 0$.
4. Choisir la bonne expression pour résoudre les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   On part donc de l'expression factorisée.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ (x+4)(7x-13) & = & 0 \\ x+4=0 & \text{ou} & 7x-13=0 \\ x=-4 & \text{ou} & 7x=13 \\ x=-4 & \text{ou} & x=\dfrac{13}{7} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x)=0 \text{ sont } -4 \text{ et } \frac{13}{7}.}$$

   (b) $f(x) = -52$.
   On part de l'expression développée réduite car elle permet de factoriser une fois qu'on a fait apparaître 0 d'un côté du signe égal :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -52 \\ 7x^2+15x-52 & = & -52 \\ 7x^2+15x & = & 0 \\ x(7x+15) & = & 0 \end{array}$$

   Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.
   Donc $x = 0$ ou $7x + 15 = 0$.
   $x = 0$ ou $x = -\dfrac{15}{7}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x)=-52 \text{ sont } 0 \text{ et } -\frac{15}{7}.}$$

Exercice 4

Les questions sont indépendantes.

1. Développer et réduire l'expression $(2x+5)^2 - 3(x+1)(x-5)$.

$$\begin{array}{rcl} (2x+5)^2-3(x+1)(x-5) & = & 4x^2+20x+25-(3x+3)(x-5) \\ & = & 4x^2+20x+25-3x^2+15x-3x+15 \\ & = & x^2+32x+40 \end{array}$$

2. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
   Comme $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, et $x - y = 11$, on obtient $(x+y) \times 11 = 77$, donc $x + y = 7$.
   De plus, $x - y = 11$, d'où, en additonnant ces deux équations, $2x = 18$, et donc $x = 9$.
   Enfin, il vient $y = -2$.
   On vérifie facilement que ce couple $(9; -2)$ convient, et c'est donc la seule solution.
3. Le nombre $1 + \sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3 - x^2 - 6x - 4 = 0$?
   $(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$.
   Donc $(1+\sqrt{5})^3 = (6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 \times 5 = 16 + 8\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{rcl} f(1+\sqrt{5}) & = & (1+\sqrt{5})^3-(1+\sqrt{5})^2-6(1+\sqrt{5})-4 \\ & = & 16+8\sqrt{5}-(6+2\sqrt{5})-6-6\sqrt{5}-4 \\ & = & 16-6-6-4+8\sqrt{5}-2\sqrt{5}-6\sqrt{5} \\ & = & 0 \end{array}$$

   L'affirmation est vraie.