1re G. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 5

Exercice 1 (cours, 3 points)

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
2. $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$
3. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2 (5 points)

Pour chaque fonction f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, et $a = -2$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x, \text{ donc } f'(-2) = 2 \times (-2) = -4.}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 7$, et $a = -1$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -4 \text{ donc } f'(-1) = -4.}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5$, et $a = 9$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 \text{ donc } f'(9) = 0.}$
4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, et $a = 1$.
   On a, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}, \text{ et } f'(1) = -\dfrac{4}{1^5} = -4.}$

Exercice 3 (3 points)

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de la fonction cube ($f(x) = x^3$) au point d'abscisse 1.
   Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :
   $$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$
   $f(1) = 1^3 = 1$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.
   D'où $y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$. $\boxed{\text{Une équation de } T \text{ est } y = 3x - 2.}$
2. La tangente T passe-t-elle par le point $E(4; 11)$? Justifier.
   On étudie si le point $E(4; 11)$ appartient à cette droite.
   $3x_E - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10 \neq y_E$.
   $\boxed{\text{Cette tangente ne passe pas par le point } E.}$

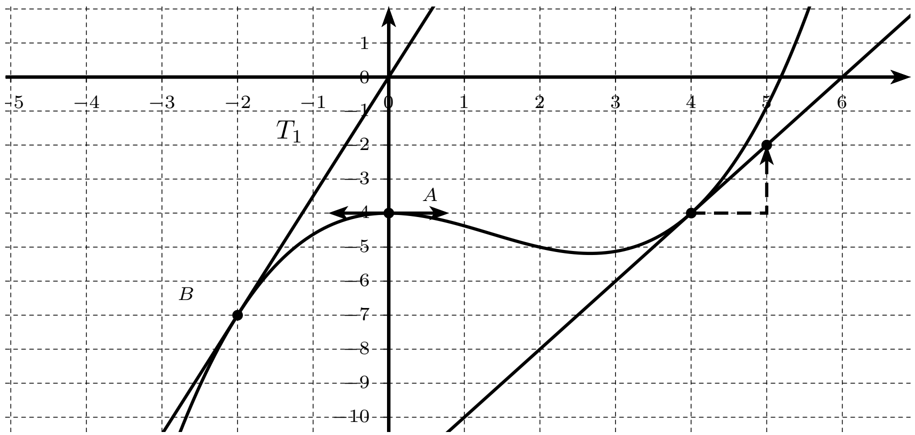
Exercice 4 (6 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
   $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 6x^2.}$
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.
   On rappelle la dérivée d'un produit de deux fonctions : $(u \times v)' = u'v + uv'$.
   $\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.}$
3. f est définie sur $]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{8 - 2x}$.
   On rappelle la dérivée de l'inverse d'une fonction $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.
   $\boxed{f'(x) = 5 \times \dfrac{-(-2)}{(8-2x)^2} = \dfrac{10}{(8-2x)^2}.}$
4. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 5}$.
   On rappelle la dérivée d'un quotient de fonctions $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   $\boxed{f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-5) - (x^2 - 3x) \times 1}{(x-5)^2} = \dfrac{x^2 - 10x + 15}{(x-5)^2}.}$

Exercice 5 (3 points)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.



1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$. Aucune justification n'est demandée.
   $\boxed{f(-2) = -7, \text{ et } f(0) = -4.}$
2. Déterminer graphiquement deux nombres dérivés de f. Justifier.
   $\boxed{\begin{array}{l} f'(a) \text{ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse } a. \\ f'(0) = 0, \text{ et } f'(-2) = 3,5. \end{array}}$
3. On admet que $f'(4) = 2$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.