Chapitre 10 : Vecteurs colinéaires dans le plan. Applications.

I Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition
Dans un repère du plan, soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Soit k un réel.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

On admet que le vecteur $k\overrightarrow{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

Exercice 1

1. Déterminer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre : ressource 487
2. Représenter le vecteur produit d'un vecteur donné par un nombre donné : ressource 89
3. Représenter le vecteur d'origine ou d'extrémité fixée produit d'un vecteur donné par un nombre donné : ressource 3571

Propriété ("règles de calcul")
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et les réels k et k', on a :

1. $k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$,
2. $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}+k'\overrightarrow{u}$,
3. $(k\times k')\overrightarrow{u} = k(k'\overrightarrow{u})$,
4. $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k=0$ ou $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

Remarque
On notera que ces "règles de calcul" sont les mêmes que pour la multiplication et l'addition avec les nombres réels.

Exercice 2
Dans un repère du plan, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs :

1. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$.
2. $\overrightarrow{b} = 3\left(\overrightarrow{u}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}\right)$

II Colinéarité de vecteurs. Applications

Définition
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls (tous les deux).
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
On considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Remarque
Deux vecteurs colinéaires non nuls ont leurs coordonnées proportionnelles.

Exemple :

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

En effet, on remarque que $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{u}$.

Exercice 3

1. Déterminer graphiquement les vecteurs colinéaires à un vecteur donné : ressource 122
2. Traduire la colinéarité de deux vecteurs de coordonnées fixées par une relation vectorielle : ressource 115

Définition (Déterminant de deux vecteurs)
On se place dans un repère du plan. Considérons les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
Le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = xy' - yx'$.

Théorème (caractérisation analytique de la colinéarité)
Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, soit $xy' - yx' = 0$.

Démonstration

1. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires.
   Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ et nul,le résultat est évident.
   On peut donc supposer que $\overrightarrow{u}$ et $\rightarrow$ sont non nuls. Il existe alors un réel k tel $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
   Ainsi, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.
   Alors, $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$.
   On a montré que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.
2. Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$ $(*)$.
   Alors, $xy' = yx'$.
   Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$.
   Sinon, on peut donc supposer que $\overrightarrow{u}$ est non nul. Cela signifie que l'une de ses coordonnées $(x; y)$ est non nulle. Par exemple, supposons que ça soit x : $x \neq 0$.
   La relation $(*)$ peut alors s'écrire $y' = \frac{x'}{x}y$. En posant $k = \frac{x'}{x}$, on a donc $y' = ky$, et on a également $x' = kx$.
   Ainsi, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Donc si $xy' - yx' = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Conclusion : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. □

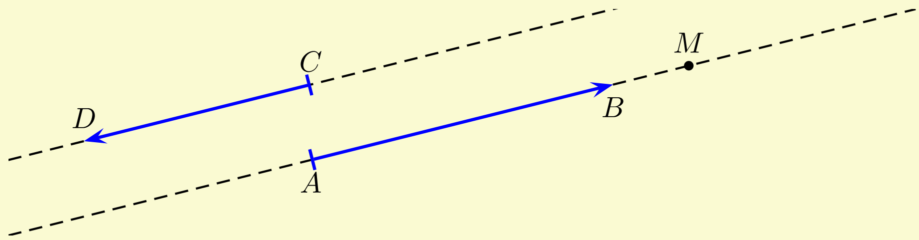
Exercice 4

Étudier si les vecteurs sont colinéaires.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2/3\\5/3\end{pmatrix}$.

Propriété (Applications de la colinéarité)

1. Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
   Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



2. les points A, B et M sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exercice 5

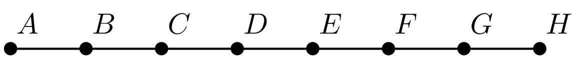
Déterminer l'abscisse ou l'ordonnée d'un vecteur colinéaire à un vecteur de coordonnées fixées : ressource 116

Remarque

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
Si $k > 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont de même sens.
Si $k < 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont de sens contraire.

Exercice 6

On considère des points A, B,..., H régulièrement placés sur une droite. Compléter avec un nombre réel.

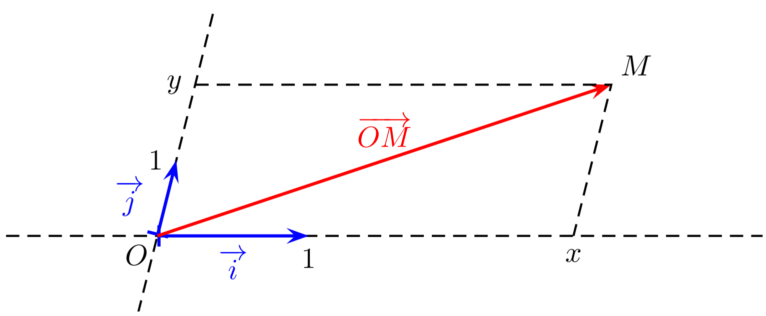


1. $\overrightarrow{DA} = \ldots \overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{DF} = \ldots \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{AE} = \ldots \overrightarrow{CD}$
4. $\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AE}$

Définition (nouvelle définition d'un repère du plan)

On définit un repère du plan par la donnée d'un triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ où O est un point, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls).
Alors, les coordonnées d'un point M sont l'unique couple $(x;y)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.$$



III Exercices

Exercice 7

1. Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle (1) : ressource 129
2. Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle (2) : ressource 125

Exercice 8

1) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB})$. Montrer que A, B et C sont alignés.

2) A, B, C et D sont 4 points deux à deux distincts du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(5\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB})$. Montrer que $(AB)//(CD)$.

Exercice 9

Construction de point. Relation de Chasles.
Soient A, B et C trois points distincts du plan.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.
3. Placer $\overrightarrow{F}$ défini par $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$
4. Placer G tel que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AC}$.
5. Placer H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 10

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire sur une figure les points E et F définis respectivement par les égalités :
$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}.$$
2. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

Exercice 11

Soient ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure avec $AB = 45$ mm, $BC = 60$ mm, et $AC = 75$ mm. Construire le point M.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Placer N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (laisser apparents les traits de construction).
4. Démontrer que les points A, M, et N sont alignés.

Exercice 12

Vecteurs. Colinéarité.
Soit ABC un triangle. Les points D, E, et F sont définis par :
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$.
1) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) En déduire que D, E, et F sont alignés.

Exercice 13

$ABCD$ est parallélogramme. On définit les points P et Q par :
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et Q est le symétrique du milieu de $[AB]$ par rapport à A.
1) Exprimer $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, pour constater qu'ils sont colinéaires.
2) Montrer que P, Q, et C sont alignés.

Exercice 14
ABC est un triangle. Les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
1) Faire une figure.
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DB}$, puis le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Montrer que B est le milieu de $[DE]$.

Exercice 15
Les points A, B et C sont tels que $\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{5}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$.
Montrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 16
Dans chaque cas montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
a) $3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.
b) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}(5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD})$.
c) $2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

Exercice 17
1. Placer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points :
$$A(-2;2),\ B(1;-4),\ C(2;6) \text{ et } D(3;4).$$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. En déduire qu'ils sont colinéaires.
3. Le quadrilatère $ABDC$ est-il un parallélogramme ? Justifiez votre réponse.
4. E est le point de coordonnées $(4;8)$. E appartient-il à la droite (AC) ?
(On pourra considérer les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EC}$).
5. Étudier de même si E appartient à la droite (BD).
6. Déterminer les coordonnées des points I et K milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que E, I et K sont alignés.

Exercice 18
ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
Les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
M est le milieu de $[DE]$.
On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
1. Donner sans démonstration les coordonnées des points A, B et C, et déterminer les coordonnées des points D, E et M.
2. Montrer que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ADE sont $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.
On rappelle que le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers du sommet.
3. On note H le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{5}{8}\right)$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
Montrer que H appartient à (BC).
4. Montrer que le triangle MBH est rectangle en H.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (AD) et (EG).