Chapitre 17 : Lois de probabilité à densité

I Lois de probabilité à densité

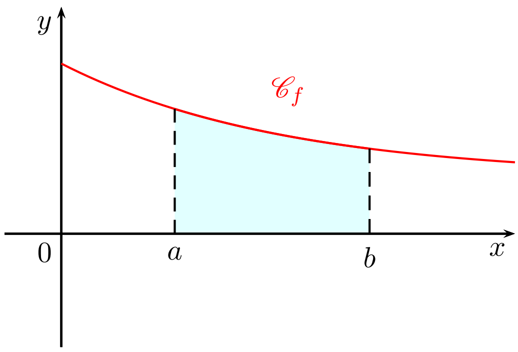
Jusqu'à présent, on a toujours rencontré des variables aléatoires qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (variable discrète).
Par exemple, une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ prend ses valeurs dans $\{0;1;\ldots;n\}$.

Vocabulaire :
On dit qu'une variable aléatoire est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple :
On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0;1]$.
La variable aléatoire X correspondant au nombre obtenu est continue. Les valeurs possibles pour X sont tous les réels de $[0;1]$.

Définition

1. On appelle fonction de densité de probabilité sur l'intervalle I toute fonction définie sur I, continue et positive sur I, et telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.
2. Une variable aléatoire à densité X sur un intervalle I est définie par la donnée d'une fonction de densité de probabilité f définie sur I.
   Alors, la probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[a;b]$ de I est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$, soit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Remarque

1. Avec $[a;b] \subset I$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $P(X \in I) = 1$ car $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 1

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vérifier que f est une fonction de densité de probabilité sur $[1;\mathrm{e}]$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer k pour que g soit une fonction de densité sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};k\right]$.

Propriété
Pour tous réels a et b appartenant à I :

1. $P(X = a) = 0$.
2. $P(X \leqslant a) = P(X < a)$ (on peut échanger inégalités larges et strictes).
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - P(X < a)$.
4. $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leqslant a)$.

Définition (espérance)
Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle $[a; b]$.
L'espérance mathématique de X est le réel $E(X) = \int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$.

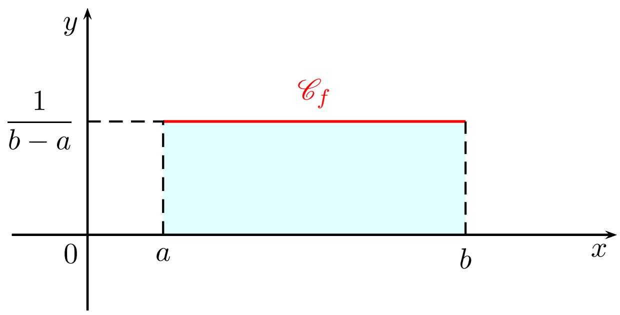
Remarque
On fera le lien avec l'espérance d'une variable aléatoire discrète :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i P(X = x_i).$$

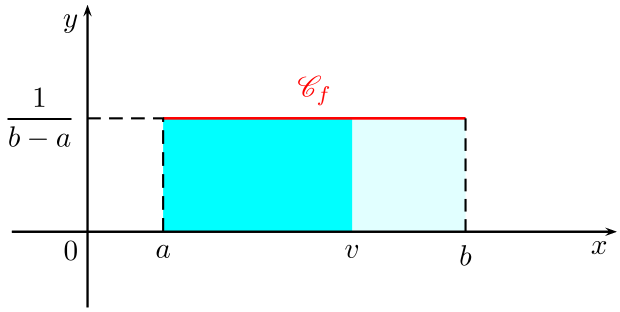
II Loi uniforme sur $[a; b]$

Définition
Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
La loi uniforme sur $[a; b]$ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a; b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Exercice 2
Vérifier que $f : \begin{array}{ccc} [a; b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{b-a} \end{array}$ est bien une fonction de densité de probabilité sur $[a; b]$.



Propriété
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$.
Alors, pour tout $v \in [a; b]$, $P(a \leqslant X \leqslant v) = \dfrac{v-a}{b-a}$.



Démonstration
La densité de probabilité de X est définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Une primitive de f est donnée par $F(t) = \dfrac{t}{b-a}$.

$P(a \leqslant X \leqslant v) = \displaystyle\int_a^v \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = F(v) - F(a) = \frac{v-a}{b-a}$. □

Remarque

1. Pour tous réels u et v tels que $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$, $P(u \leqslant X \leqslant v) = \dfrac{v-u}{b-a}$.
2. Pour tout $u \in [a;b]$, $P(X \geqslant u) = \dfrac{b-u}{b-a}$.

Ces résultats se montrent de la même façon que la propriété précédente.

Propriété (espérance de la loi uniforme)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Démonstration

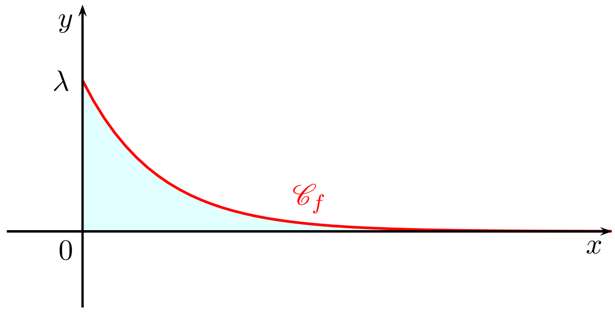
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, en posant $g(t) = t$, une primitive de g sur $[a;b]$ est la fonction G définie par $G(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

Donc $E(X) = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\right) = \dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$. □

III Loi exponentielle

Définition
Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$).
Une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.



Remarque

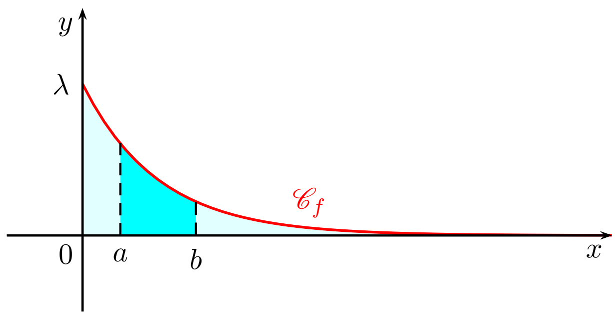
1. $f(0) = \lambda$.
2. f est décroissante sur $[0; +\infty[$ (on le montre facilement en dérivant).
3. f est bien une fonction de densité sur $[0; +\infty[$:
   — Elle est clairement continue et positive sur $[0; +\infty[$.

   — Vérifions que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$.
   Une primitive de f sur $[0; +\infty[$ est la fonction définie par $F(t) = -\mathrm{e}^{\lambda t}$.
   D'où $\displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1$.
   En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$, soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Propriété
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors, pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$,

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}.$$

En particulier, $P(T \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$ et $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.



Démonstration
La fonction $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} P(a \leqslant T \leqslant b) &= \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= F(b) - F(a) \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda b} - (-\mathrm{e}^{-\lambda a}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b} \end{aligned}$$

En particulier, $P(T \leqslant b) = P(0 \leqslant T \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.
Par suite, $P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$. □

Propriété
Si T suit une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h,

$$P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)=P(T\geqslant h).$$

Remarque
Cela traduit le fait que la loi exponentielle est sans mémoire.

Démonstration
Notons A l'événement $T\geqslant t+h$ et B l'événement $T\geqslant t$.
Il est clair que $A\subset B$, donc $A\cap B=A$.

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda h} \\ &= P(T\geqslant h) \end{aligned}$$

Théorème (définition)
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

$$E(T)=\lim_{Y\to+\infty}\int_0^Y xf(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{Y\to+\infty}\int_0^Y x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (à connaître)
Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=xf(x)=\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
On cherche une primitive de g sous la forme $G(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ avec a et b réels.
Pour tout $x\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= a\mathrm{e}^{-\lambda x}+(ax+b)\times(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= (-\lambda ax+a-\lambda b)\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

La fonction G est une primitive de g sur $[0;+\infty[$ ssi $G'=g$, c'est-à-dire

$$\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}=(-\lambda ax+a-\lambda b)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Il suffit de choisir a et b de sorte que $-\lambda a=\lambda$ et $a-\lambda b=0$.
Ainsi, $a=-1$ et $b=\dfrac{a}{\lambda}=\dfrac{-1}{\lambda}$.

D'où $G(x) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Alors, pour tout réel positif A,

$$\begin{aligned}
\int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= G(A) - G(0) \\
&= \left(-A - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}(-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1)
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A = -\infty$, et $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^X = 0$. Par composée, $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$.
Comme $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A = -\infty$, et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, il vient par composée $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{A \to +\infty} (-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$.
Ainsi, $E(T) = \int_0^{+\infty} x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$. $\square$