Terminale STI. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1 (n° 32 page 98)

Partie A

Le coût de production de x m^3 de détergent est donné en euros par $C(x) = x^2 + 60x + 121$ pour $x \in [1;30]$.

On note f la fonction représentant le coût moyen par m^3.

1. Expression de $f(x)$.
   Pour tout $x \in [1;30]$,
   $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2+60x+121}{x} = x + 60 + \dfrac{121}{x}$
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 1 + 121 \times \dfrac{-1}{x^2} = 1 - \dfrac{121}{x^2}$.

   (b) En factorisant,
   $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{121}{x^2} = \dfrac{x^2-121}{x^2}$.
   Or, $x^2 - 121 = (x-11)(x+11)$ avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
   On peut aussi développer $(x-11)(x+11)$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
3. Tableau de variation.
   On étudie le signe de $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$ sur $[1;30]$.
   $x - 11 = 0$ ssi $x = 11$.
   $x + 11 = 0$ ssi $x = -11$ mais $-11 \notin [1;30]$.
   $x^2 = 0$ ssi $x = 0$ (valeur interdite mais $0 \notin [1;30]$).
   Pour tout $x \in [1;30]$, $x^2 > 0$ (un carré est toujours positif ; et x ne s'annule pas sur l'intervalle).

x	1		11		30
$x-11$		$-$	0	$+$	
$x+11$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	182	$\searrow$	82	$\nearrow$	$\dfrac{2821}{30}$

On calcule les images avec l'expression de $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

$f(1) = 1 + 60 + \dfrac{121}{1} = 182$

$f(11) = 11 + 60 + \dfrac{121}{11} = 82$.

$f(30) = 30 + 60 + \dfrac{121}{30} = \dfrac{2821}{30} \approx 94$.

4. Le coût moyen minimal est de 82 euros par m^3. Il est obtenu pour une production de 11 m^3 de détergent.

Partie B

Le détergent est vendu 110 euros par m^3.

1. Montrer que le bénéfice est donné par $B(x) = -x^2 + 50x - 121$.
   $B(x) = \text{Recette} - \text{Cout}$
   $B(x) = \text{Prix} \times \text{quantite} - \text{Cout}$
   Donc $B(x) = 110x - (x^2 + 60x + 121) = -x^2 + 50x - 121$.
2. Variations de B sur $[1;30]$.
   $B'(x) = -2x + 50$.
   Donc $B'(x) = 0$ ssi $-2x + 50 = 0$ ssi $x = 25$.

x	1		25		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-72	$\nearrow$	504	$\searrow$	479

$B(1) = -1^2 + 50 \times 1 - 121 = -72$.
$B(25) = -25^2 + 50 \times 25 - 121 = 504$.
$B(30) = -30^2 + 50 \times 30 - 121 = 479$.

3. Le bénéfice maximal est de 504 euros, obtenu pour 25 m^3 produits.