Exercices sur les vecteurs (sans coordonnées).
Colinéarité et applications.

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Les points D, E et F sont définis par : $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et $3\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FC}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.
2. Faire une figure.
3. Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
5. Que peut-on en déduire sur les points D, E et F ? Justifier.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire sur une figure les points E et F définis respectivement par les égalités :
$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}.$$
2. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

Exercice 3
Soit ABC un triangle. Les points D, E, et F sont définis par :
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$.
1) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) En déduire que D, E, et F sont alignés.

Exercice 4
ABC est un triangle. Les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
1) Faire une figure.
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DB}$, puis le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Montrer que B est le milieu de $[DE]$.

Exercice 5
Les points A, B et C sont tels que $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$.
Montrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 6
Soient A, B, C, D 4 points, $A \neq B$, et $C \neq D$.
Dans chaque cas montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
a) $3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.
b) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD})$.
c) $2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

Éléments de réponses

Exercice 1

Soit ABC un triangle. Les points D, E et F sont définis par : $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et $3\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FC}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.
   $3\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FC}$, donc $3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) = 2\overrightarrow{FC}$, puis $3\overrightarrow{CF} + 2\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{BC}$, etc...
2. Faire une figure.
3. Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \ldots = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   On trouve $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \ldots = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{9}{10}\overrightarrow{AC}$
5. Que peut-on en déduire sur les points D, E et F ? Justifier.
   On remarque que $\overrightarrow{FD} = \frac{9}{5}\overrightarrow{ED}$.
   En effet, $\frac{9}{5}\overrightarrow{ED} = \frac{9}{5}(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) = \ldots = \overrightarrow{FD}$.
   $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires, les points E, F, D sont alignés.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire sur une figure les points E et F définis respectivement par les égalités :
   $$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}.$$
2. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.
   On va montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.
   On les exprime en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$.
   On remarque que $\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$, etc...

Exercice 3

L'ex a été vu en permanence maths

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

a) $3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.

On cherche à montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. $3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$,
$3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$,
$2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.
$2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, $(AB)//(CD)$.