Seconde. Interrogation de mathématiques n° 9
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

1. Donner la définition d'une fonction f croissante sur un intervalle I.
   On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :
   $$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
   On dit que f admet un maximum en a lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$.
3. Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs dans un repère du plan.
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$.
4. Les points A, B et C sont alignés ssi les vectuers $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
5. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 2 (1 point)

Dans un repère orthonormé du plan, soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Compléter sans justifier.

1. Les coordonnées du vecteur $3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix}13\\-4\end{pmatrix}$
2. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{26}$

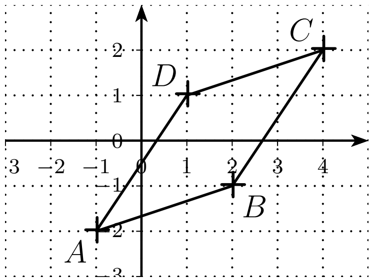
Exercice 3 (3 points)

On se place dans un repère du plan.

1. Étudier si les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1/5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\60\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
   $xy' - yx' = \dfrac{1}{5} \times 60 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0.$
   On peut aussi observer que $\overrightarrow{v} = -30\overrightarrow{u}$.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires.}}$
2. Donner les coordonnées de 2 vecteurs non nuls et colinéaires au vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
   $\boxed{\text{Par exemple, } -\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \text{ et } 3\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix} \text{ conviennent.}}$
3. Déterminer le réel a pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-11\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a\\5\end{pmatrix}$ soient colinéaires.
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$
   ssi $-11 \times 5 - 2 \times a = 0$ ssi $2a = -55$ ssi $a = -\dfrac{55}{2}$.

Exercice 4 (5 points)

1. Placer dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ les points $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$, et $C(4;2)$.



2. Les points A, B, et C sont-ils alignés ? Justifer par le calcul.
   A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

$xy' - yx' = 3 \times 4 - 5 \times 1 = 7 \neq 0$.

$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ne sont pas colinéaires, } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$

3. Soit $D(1;1)$. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   On a vu que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \text{ et } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$
4. Les droites (AC) et (OD) sont-elles parallèles ? Justifier.
   $(AC)//(OD)$ ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
   On sait que $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
   $xy' - yx' = 5 - 4 = 1 \neq 0$.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{OD} \text{ ne sont pas colinéaires, les droites } (AC) \text{ et } (OD) \text{ ne sont pas parallèles.}}$

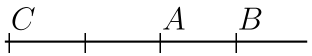
Exercice 5 (2 points)

Soient A, B, C trois points du plan tels que $3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0}\\
3\overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
-\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{AC} &= -2\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

2. Placer le point C sur la droite (AB).

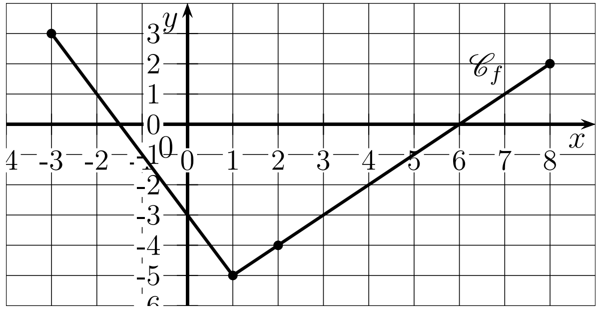


Exercice 6 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-3;8]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x - 3 & \text{si } x \in [-3;1] \\ f(x) = x - 6 & \text{si } x \in]1;8] \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f. Justifier.
   La fonction f est affine par morceaux, il suffit de déterminer deux points sur chaque intervalle.
   Sur $[-3;1]$, $f(x) = -2x-3$, donc $f(-3) = 3$, et $f(1) = -5$.
   Sur $]1;8]$,$f(x) = x - 6$, donc $f(2) = -4$ et $f(8) = 2$.



2. Déterminer le tableau de variation de f sur $[-3;8]$.
   Sur $[-3;1]$, f est affine et $a = -2 < 0$. donc f est strcitement décroissante sur $[-3;1]$.
   Sur $]1;8]$, f est affine et $a = 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $]1;8]$.

x	-3		1		8
$f(x)$	3	↘	-5	↗	2

3. Déterminer le tableau de signe de f.
   $-2x - 3 = 0$ ssi $x = -\dfrac{3}{2}$, et $-\dfrac{3}{2} \in [-3;1]$.
   $x - 6 =$ ssi $x = 6$ et $6 \in]1;8]$.

x	-3		$-3/2$		6		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	