T5. Correction du contrôle n° 2

Exercice 1

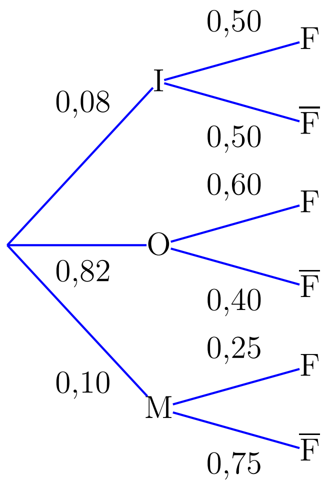
Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Partie A

1. Arbre de probabilités :



2. Calculer la probabilité d'interroger :
   (a) un agent de maintenance ;
   $p(\text{M}) = 1 - (P(I) + P(O) = 1 - 0,08 - 0,82 = 0,1$.
   (b) une femme agent de maintenance ;
   $p(\text{M} \cap \text{F}) = P(M) \times P_M(F) = 0,10 \times 0,25 = 0,025$.
   (c) une femme.
   Les événements I, O et M forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(\text{F}) &= p(\text{F} \cap \text{I}) + p(\text{F} \cap \text{O}) + p(\text{F} \cap \text{M}) \\ &= 0,08 \times 0,5 + 0,82 \times 0,6 + 0,1 \times 0,25 \\ &= 0,557 \end{aligned}$$

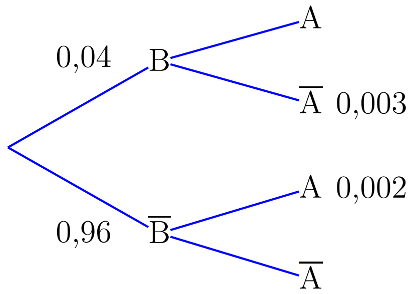
3. Les événements I et F sont-ils indépendants ?
   On a vu que $p(\text{F}) = 0,557$, et d'après l'arbre $p_{\text{I}}(\text{F}) = 0,5$.
   $\boxed{\text{Comme } p(\text{F}) \neq p_{\text{I}}(\text{F}) \text{, les événements F et I ne sont pas indépendants.}}$

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$. On a l'arbre suivant :



On a $p\left(\text{B}\cap\overline{\text{A}}\right)=p(\text{B})\times p_{\text{B}}\left(\overline{\text{A}}\right) \iff p_{\text{B}}\left(\overline{\text{A}}\right)=\dfrac{p\left(\text{B}\cap\overline{\text{A}}\right)}{p(\text{B})}=\dfrac{0,003}{0,04}=\dfrac{3}{40}$.

On en déduit que $p_{\text{B}}(\text{A})=1-\dfrac{3}{40}=\dfrac{37}{40}$.

D'où $p(\text{B}\cap\text{A})=p(\text{B})\times p_{\text{B}}(\text{A})=0,04\times\dfrac{37}{40}=0,037$.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
   B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales,
   $p(A)=p(\text{B}\cap\text{A})+p\left(\overline{\text{B}}\cap\text{A}\right)=0,04\times\dfrac{37}{40}+0,002=0,037+0,002=0,039$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.
   $p_{\text{A}}(\text{B})=\dfrac{p(\text{A}\cap\text{B})}{p(\text{A}}=\dfrac{0,037}{0,039}=\dfrac{37}{39}$.

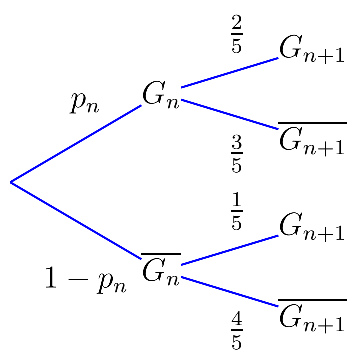
Exercice 2
Un site internet propose des jeux en ligne.
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1=1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{1}{5}$.
   Il est clair que G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(G_{n+1}\right) \\ &= p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}\left(1 - p_n\right) \\ &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \geqslant 1,\ p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}.}$$

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
   Pour tout n entier naturel non nul,
   $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}u_n$.

   L'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
   Son premier terme est $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

   (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
   On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 :
   $u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.
   Comme $u_n = p_n - \frac{1}{4}$, soit $p_n = u_n + \frac{1}{4}$, on a finalement :

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.}$$

   (c) Déterminer la limite de p_n.
   Comme $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$.

   $$\boxed{\text{Il en résulte que } \lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}.}$$

   (d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n - \frac{1}{4} < 10^{-6}$?
   Pour tout $n \geqslant 1$,

   $$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{3}{4} \times \left[\left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{5} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{15}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 0 \end{aligned}$$

   Donc la suite (p_n) est décroissante.
   On va déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel $p_{n_0} - \frac{1}{4} < 10^{-6}$;

Algorithme.
DÉBUT
n prend la valeur 1
p prend la valeur 1
Tant que $p - \dfrac{1}{4} \geqslant 10^{-6}$
    n prend la valeur $n+1$
    p prend la valeur $\dfrac{1}{5}p + \dfrac{1}{5}$
Fin Tant que
Afficher n
FIN
On trouve $n_0 = 10$.

Comme la suite (p_n) est décroissante, l'inégalité $p_n - \dfrac{1}{4} < 10^{-6}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 10$.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\dfrac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

   On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$. X étant la variable aléatoire comptant le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$. X suit $\mathcal{B}\left(10; \dfrac{1}{4}\right)$.

2. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

   $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - \dbinom{10}{0} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^0 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,944 \approx 0,94$ à 10^{-2} près.