

BTS – Développements limités

I Définition et formulaire

L'objectif des développements limités est d'approcher localement une fonction par une fonction polynomiale plus simple à manipuler. En mathématiques, cette approximation permet notamment de déterminer des limites.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ et une fonction ε tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque

- La notion de développement limité (DL) est locale. Elle n'a d'intérêt que pour x proche de 0.
- Le polynôme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ est appelé la partie régulière. Il y a unicité de la partie régulière.
- On peut déterminer un DL en $x \neq 0$. La méthode consiste à changer de variable pour se ramener en 0.
- De nombreux logiciels de calcul formel permettent d'obtenir un DL à l'ordre souhaité. Sur Geogebra, la commande est `PolynômeTaylor(f,a,k)` où f est la fonction, a l'abscisse souhaitée (on prendra 0), et k l'ordre souhaité.

Propriété (formulaire : quelques DL en 0 usuels)

Dans les formules suivantes, on suppose toujours que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$
2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$
3. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$
4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\varepsilon(x).$
5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$

Exemple :

Le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction $\exp$ est $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x).$

II Applications

II.1 Obtenir une limite grâce à un développement limité

Les DL sont un outil particulièrement puissant pour déterminer des limites qui résistent aux outils classiques (formes indéterminées).

Exemple :

Déterminons la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Donc $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

En divisant par x^3 , on obtient : $\frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6} + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$

II.2 Obtenir la tangente et la position relative localement par rapport à cette tangente

Propriété

Soit f admettant un DL en 0 :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

L'équation de la tangente en 0 est $y = a_0 + a_1x$.

La position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0 est donnée par le signe du premier terme suivant $a_0 + a_1x$ dans le DL de f .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2x^2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Un logiciel permet d'obtenir $f(x) = 1 + 2x + \frac{8}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

1. On en déduit que la tangente T au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1 + 2x$.
2. La position relative de la courbe est donnée par le signe de $\frac{8}{3!}x^3$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{8}{3!}x^3$	$-$	0	$+$

Donc lorsque x est proche de 0 et $x > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T .

Pour $x < 0$ et x proche de 0, $\mathcal{C}$ est en-dessous de T .

Remarque

Attention, la position relative de la courbe par rapport à la tangente n'est valable qu'au voisinage de 0.