CRSA1. Correction du devoir de mathématiques n° 6

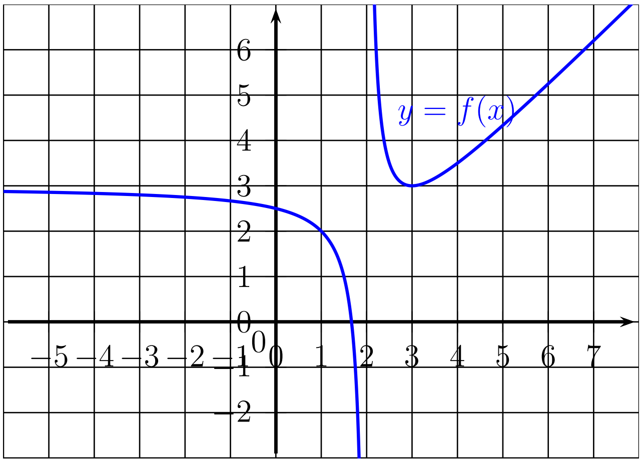
Exercice 1 (2 points)

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} (1-3x^3) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 11 - e^x = 11 \qquad \lim\limits_{x\to-1} -x^2+4x+9 = 4$

Exercice 2 (1 point)

Lire graphiquement les limites de f aux bornes de $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3 \ \lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -\infty \ \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = +\infty \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$



Exercice 3 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{4}{x-3}$.

1. Déterminer la limite de f en 3 à gauche et à droite.
   $\lim\limits_{x\to 3} 2x - 1 = 5$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

   $\lim\limits_{x\to 3+} x - 3 = 0+$. Par quotient $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{4}{x-3} = +\infty$.

   $\boxed{\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = +\infty.}$

2. En déduire une asymptote à la courbe de f et préciser son équation.
   $\boxed{\text{La droite d'équation } x = 3 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f.}$

3. Justifier que la courbe de f admet aussi une asymptote oblique en $+\infty$, et préciser son équation. $f(x) - (2x-1) = \dfrac{4}{x-3}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-3} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2x-1) = 0$.

   $\boxed{\text{La droite d'équation } y = 2x-1 \text{ est asymptote oblique à la courbe de } f \text{ en } +\infty.}$

Exercice 4 (8 points)

Calculer en détaillant précisément les justifications les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(3-x^2)$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x(3-x^2)$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-x^2) = -\infty$. $\boxed{\text{Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(3-x^2) = -\infty.}$

   $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0}(3-x^2) = 3$. $\boxed{\text{Par produit, } \lim\limits_{x\to 0} e^x(3-x^2) = 3.}$

2. $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1-3x}{x-2}$

   $\lim\limits_{x\to 2} 1-3x = -5$, et $\lim\limits_{x\to 2-} x-2 = 0-$.

   $\boxed{\text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1-3x}{x-2} = +\infty.}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-5x}$

   $\lim\limits_{x\to +\infty} -5x = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$.

   $\boxed{\text{Par composée, } \lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-5x} = 0}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3+10x^2}{-4x+1}$

   Posons $f(x) = \dfrac{2x^3+10x^2}{-4x+1} = \dfrac{x^3(2+10/x)}{x(-4+1/x)} = x^2 \times \dfrac{2+10/x}{-4+1/x}$.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} 2+\dfrac{10}{x} = 2$, et $\lim\limits_{x\to -\infty} -4+\dfrac{1}{x} = -4$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2+10/x}{-4+1/x} = -\dfrac{1}{2}$.

   Et $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$.

   $\boxed{\text{Par produit, } \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.}$

Exercice 5 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x+2}{\mathrm{e}^x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} 5x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0+$ (on a toujours $\mathrm{e}^x > 0$).

   Par quotient, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-5x+3}{\mathrm{e}^x}$

   Dérivée d'un quotient de fonctions : $(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

   Donc $f'(x) = \dfrac{5\mathrm{e}^x - (5x+2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(5-5x-2)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} = \dfrac{-5x+3}{\mathrm{e}^x}$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f (on admettra que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$).

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-5x+3$.

   Or, $-5x+30$ ssi $x = \dfrac{3}{5}$, et $-5x+3>0$ ssi $x < \dfrac{3}{5}$.

   $f\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{5\times(3/5)+2}{\mathrm{e}^{(3/5)}} = 5\mathrm{e}^{-3/5}$

x	$-\infty$		$3/5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$5\mathrm{e}^{-3/5}$	$\searrow$	0

4. Bonus : démontrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

   On lève l'indétermination en factorisant par le terme prépondérant.

   $f(x) = \dfrac{x(5+2/x)}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times (5+\dfrac{2}{x})$.

   Par croissace comparée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Et $\lim\limits_{x\to +\infty} (5+\dfrac{2}{x}) = 5+0 = 5$.

   $\boxed{\text{Par produit, } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0.}$