Correction de l'interrogation n° 2
Sujet 1

Exercice 1 (6,5 points)

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{2x+11}{3-x}$.

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
   $D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.
   Limites à l'infini :
   Pour tout x différent de 0 et 3, $f(x) = \dfrac{x\left(2+\dfrac{11}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)} = \dfrac{2+\dfrac{11}{x}}{\dfrac{3}{x}-1}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{11}{x} = 2+0 = 2$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}-1 = 0-1 = -1$.
   $\boxed{\text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2.}$
   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{11}{x} = 2+0 = 2$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x}-1 = 0-1 = -1$.
   $\boxed{\text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2.}$
   Limites en 3 à gauche et à droite.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

   $\lim\limits_{x\to3} 2x+11 = 2\times3+11 = 17 > 0$.
   $\lim\limits_{x\to3-} 3-x = 0+$.
   $\boxed{\text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to3-} f(x) = +\infty.}$
   $\lim\limits_{x\to3+} 3-x = 0-$.
   $\boxed{\text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to3+} f(x) = -\infty.}$

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
   $3-x = 0$ ssi $x = 3$.
   f est dérivable sur son ensemble de définition par quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \neq 3$,
   $f'(x) = \dfrac{2(3-x)-(2x+11)\times(-1)}{(3-x)^2} = \dfrac{6-2x+2x+11}{(3-x)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{17}{(3-x)^2} > 0$.
   En effet, un carré est toujours positif et $17 > 0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-2

3. Justifer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes et préciser une équation de chacune.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   Elle est aussi asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.
   Comme $\lim\limits_{x\to3-} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2 (3,5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2+\dfrac{1}{x-2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   $f(x)$ existe ssi $x \neq 2$ et $2+\dfrac{1}{x-2} \geqslant 0$.
   $2+\dfrac{1}{x-2} \geqslant 0$ ssi $\dfrac{2x-3}{x-2} \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$1,5$		2		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x-3}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\boxed{D_f =]-\infty ; 1,5] \cup]2;+\infty[.}$

2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x-2} = 2 + 0 = 2.$
   $\lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}.$
   $\boxed{\text{Par composée, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}.}$
3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 2 à droite.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

   $\lim\limits_{x\to 2+} x - 2 = 0+$, donc $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty.$
   Par somme, $\lim\limits_{x\to 2+} 2 + \dfrac{1}{x-2} = +\infty.$
   $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty.$
   $\boxed{\text{Par composée, } \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = +\infty.}$

Réponses du sujet 2 (sans rédaction)

Exercice 3 (6,5 points)

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 2$ par

$$f(x) = \frac{-3x+5}{x-2}.$$

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3.$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3.$
   $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = +\infty.$
   $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = -\infty.$
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
   Pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0.$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-3

3. Justifer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes et préciser une équation de chacune.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$, la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   Elle est aussi asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 4 (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-3x}{1-x}}.$$

1. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
   Pour tout $x > 1$, $\dfrac{2-3x}{1-x} = \dfrac{\frac{2}{x} - 3}{\frac{1}{x} - 1}.$
   On en déduit par quotient que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-3x}{1-x} = 3.$
   Enfin, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{3}.$
2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 1 à droite.
   $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2-3x}{1-x} = +\infty.$
   Par composée, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty.$