1G. Correction du dm5

Exercice 1 (102 page 91)
On donne $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$.

1. Calcul de termes
   $u_1 = \dfrac{u_0}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ $\quad u_2 = \dfrac{u_1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ $\quad u_3 = \dfrac{u_2}{2} + 1 = \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{7}{4}$.
   Avec un tableur, $u_{100} \approx 2$.
2. Conjecture : on peut penser que (u_n) converge vers 2, soit $\lim u_n = 2$.
3. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
   (u_n) est arithmétique ssi $u_{n+1} - u_n$ est constant.
   $u_2 - u_1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$, et $\quad u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.
   Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
   Comme $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant, la suite n'est pas arithmétique.
   De plus, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \neq 0$. Il n'y a aucun réel q vérifiant $u_1 = q \times u_0$, donc la suite n'est pas géométrique.
   Remarque : pour étudier si une suite est géométrique, on peut étudier si le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, mais ici $u_0 = 0$ et on évite d'écrire une division par 0.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.
   (a) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n. Puis déterminons la nature de (v_n).
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

   Ou bien, pour finir le calcul, comme $v_n = u_n - 2$, on a $u_n = v_n + 2$, et on remplace u_n par $v_n + 2$.
   La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$.

   (b) Exprimons v_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   (c) Exprimons u_n en fonction de n.
   Comme $v_n = u_n - 2$, il vient $u_n = v_n + 2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$.

   (d) Au tableur, on devine que $\lim v_n = 0$, ce qui est cohérent avec la conjecture de la question 1 sur $\lim u_n = 2$.

Exercice 2 (104 page 92)
Capital de départ : 5000 euros.
Formule A : le capital au bout de n années, noté C_n, augmente de 250 euros chaque année.
Formule B : le capital au bout de n années, noté K_n, augmente de 4% chaque année.

1. Calcul des trois premiers termes.
   $C_0 = 5000$, $C_1 = C_0 + 250 = 5000 + 250 = 5250$, $C_2 = C_1 + 250 = 5250 + 250 = 5500$.
   $K_0 = 5000$.
   $K_1 = K_0 + K_0 \times \dfrac{4}{100} = K_0 \times (1 + 0,04) = 5000 \times 1,04 = 5200$.
   $K_2 = K_1 + K_1 \times 0,04 = 1,04 \times K_1 = 5200 \times 1,04 = 5408$.
2. Relation de récurrence, puis nature des suites.
   Pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 250$.
   (C_n) est la suite arithmétique de premier terme $C_0 = 5000$ et raison $r = 250$.
   Pour tout entier n, $K_{n+1} = K_n + 0,04K_n = 1,04 \times K_n$.
   (K_n) est la suite géométrique de premier terme $K_0 = 5000$ et raison $q = 1,04$.
3. Expression du capital au bout de n années.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_0 + nr = 5000 + 250n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = K_0 \times q^n = 5000 \times 1,04^n$.
4. Capital au bout de 6 ans.
   $C_6 = 5000 + 6 \times 250 = 6500$.
   $K_6 = 5000 \times 1,04^6 \approx 6327$.
5. Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ? Cela dépend-il du capital initial ?
   Formule A.
   $C_n \geqslant 2 \times C_0$ ssi $5000 + 250n \geqslant 10000$ ssi $n \geqslant \dfrac{5000}{250}$ ssi $n \geqslant 20$.
   Avec la formule A, le capital de départ est doublé au bout de 20 ans.
   Cette durée dépend de C_0 : avec $C_0 = 50$, $C_1 = 50 + 250 = 300$, le capital serait doublé dès la première année.
   Formule B.
   $K_n \geqslant 2 \times K_0$ ssi $5000 \times 1,04^n \geqslant 2 \times 5000$ ssi $1,04^n \geqslant 2$.
   Avec la calculatrice, on observe que $1,04^n$ dépasse 2 pour la première fois lorsque $n = 18$.
   $1,04^{17} \approx 1,95$, et $1,04^{18} \approx 2,03$.
   Avec la formule B, le capital de départ est doublé au bout de 18 ans.
   Cette durée ne dépend pas du capital initial puisque cela revient à chercher le plus petit entier n tel que $1,04^n \geqslant 2$.

Exercice 3 (sujet A page 99)

1. L'iode 131 perd 8,3% de sa masse chaque jour. Sa masse initiale en grammes est $M_0 = 100$ et on note M_n sa masse au bout de n jours.
2. Au bout de 2 jours :
   $M_1 = 100 \times (1 - 0,083) = 100 \times 0,917 = 91,7$.
   $M_2 = 91,7 \times 0,917 \approx 84,1$. Réponse b.
3. La suite (M_n) est géométrique de raison $0,917$.
   En effet, $M_{n+1} = M_n - M_n \times 0,083 = Mn \times (1 - 0,083) = M_n \times 0,917$. Réponse b.
4. Expression de M_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = M_0 \times q^n = 100 \times 0,917^n$. Réponse d.
5. Pour retourner la liste des masses jusqu'au n^{e} jour,
   ```
   def suiteA(n) :
       M=100
       L=[100]
       for i in range(1,n+1):
           M=M*0.917
           L.append(M)
       return(L)
   ```
   Réponse c.
6. La masse est inférieure à 10 grammes après 27 jours.
   $M_{26} = 100 \times 0,917^{26} \approx 10,5$.
   $M_{27} = 100 \times 0,917^{27} \approx 9,6$. Réponse d.