

1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°4.

Exercice 1 (18 page 174)

1. $e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$.
2. $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$.
3. $e^{1-x} \times e^{-1-x} = e^{1-x-1-x} = e^{-2x}$.

Exercice 2 (19 page 174)

1. $(e^x)^4 = e^{4x}$.
2. $(e^{2x})^{-1} = e^{2x \times (-1)} = e^{-2x}$.
3. $(e^{-x+1})^2 = e^{(-x+1) \times 2} = e^{-2x+2}$.

Exercice 3 (19 page 174)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $\frac{e^x}{e^{0,01}} = e^{x-0,01}$
2. $\frac{e^x}{e^{0,01x}} = e^{x-0,01x} = e^{0,99x}$
3. $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+1-(x-1)} = e^{x+2}$

Exercice 4 (34 page 175)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2e^x$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + 2e^x$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $2e^x > 0$ et $3 + 2e^x > 3$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + 2e^x > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (43 page 175)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 1 = e^x(e^x - e^{-x})$.

En développant,

$$e^x(e^x - e^{-x}) = e^x \times e^x - e^x \times e^{-x} = e^{x+x} - e^{x-x} = e^{2x} - e^0 = e^{2x} - 1.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 1 = e^x(e^x - e^{-x})$.

Exercice 6 (44 page 175)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = e^x - e^{-x}$.

En développant,

$$(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = e^{x-x} + e^x - e^{-x} - 1 = e^0 + e^x - e^{-x} - 1 = 1 + e^x - e^{-x} - 1 = e^x - e^{-x}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = e^x - e^{-x}$.

Exercice 7 (45 page 175)

1. $e^{5x+2} \times e^{x-5} = e^{5x+2+x-5} = e^{6x-3}$.
2. $\frac{e^{x^2+1}}{e^{x+2}} = e^{x^2+1-(x+2)} = e^{x^2-x-1}$.
3. $(e^{2x+7})^2 \times (e^{1-x})^3 = e^{2(2x+7)} \times e^{3(1-x)} = e^{4x+14+3-3x} = e^{x+17}$

Exercice 8 (62 page 176)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = e^x - 2xe^x = e^x(1 - 2x)$.

Comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $A(x)$ a le même signe que $1 - 2x$.

$$1 - 2x = 0 \text{ ssi } x = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$1 - 2x$	+	0	-
e^x	+		+
$A(x) = (1 - 2x)e^x$	+	0	-

2. $B(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(x - x^2)$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$,

$B(x)$ a le même signe que $x - x^2 = x(1 - x)$.

$x - x^2$ est une expression du second degré, qui a pour racines 0 et 1, et qui est négative (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$B(x)$	-	0	+	0	-

Exercice 9 (63 page 176)

1. $A(x) = 4e^{-x} - x^2e^{-x} = (4 - x^2)e^{-x} = (2 - x)(2 + x)e^{-x}$.

Une exponentielle est toujours strictement positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

Donc $A(x)$ a le même signe que $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$, qui est du second degré ayant pour racines 2 et -2 et qui est négatif (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$A(x)$	$-$	0	$+$	0

2. $B(x) = xe^x - e^{x+2} = xe^x + e^xe^2 = e^x(x - e^2)$.

Comme $e^x > 0$, $B(x)$ a le même signe que $x - e^2$.

x	$-\infty$	e^2	$+\infty$
$B(x)$	-	0	+

Exercice 10 (11 page 181)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3 + xe^x$.

1. Dérivée.

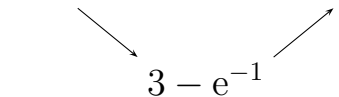
Par produit et somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0 + 1e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.

2. Variations de g .

Comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de $(x + 1)$.

$x + 1 = 0$ ssi $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

$$g(-1) = 3 + (-1)e^{-1} = 3 - e^{-1}.$$

3. Extremum

D'après la question précédente, g admet un minimum en -1 , ce minimum est de $3 - e^{-1}$.

Exercice 11 (90 page 178)

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2e^x}$.

1. Montrons que f' est du signe de $2x - x^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x \neq 0$ car $e^x > 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x \times 2e^x - x^2 \times 2e^x}{(2e^x)^2} = \frac{2e^x(2x - x^2)}{2e^x \times 2e^x} = \frac{2x - x^2}{2e^x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x - x^2$.

2. Variations de f .

$2x - x^2 = x(2 - x)$ est une expression du second degré qui a pour racines 0 et 2.

Elle est négative (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$2x - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $2e^{-2}$				

$$f(0) = \frac{0^2}{2e^0} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2e^2} = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2}.$$