Exercices sur les suites arithmétiques et géométriques
Correction

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes (en justifiant le résultat) :

1. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{60}$,
   où (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = -5$ et de premier terme $u_0 = 1$.
   On calcule le dernier terme u_{60}.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
   Donc $u_{60} = u_0 + 60 \times r = 1 + 60 \times (-5) = -299$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{60} &= \frac{u_0 + u_{60}}{2} \times 61 \\ &= \frac{1 - 299}{2} \times 61 \\ &= -9089. \end{aligned}$$

2. $T = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$.
   T est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.
   La somme allant de $3^0 = 1$ à 3^{15}, elle contient 16 termes.

$$\begin{aligned} T &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15} \\ &= 1 \times \frac{1 - 3^{16}}{1 - 3} \\ &= \frac{3^{16} - 1}{2} \\ &= 21\,523\,360 \end{aligned}$$

3. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} (3k + 7)$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{100} (3k + 7) \\ &= 3 \sum_{k=0}^{100} k + \sum_{k=0}^{100} 7 \\ &= 3 \times \frac{(0 + 100) \times 101}{2} + \underbrace{7 + 7 + \ldots + 7}_{101 \text{ fois}} \\ &= 3 \times 5050 + 7 \times 101 \\ &= 15\,857 \end{aligned}$$

4. $B = \displaystyle\sum_{j=1}^{49} \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{49} \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \\ &= 1 - \frac{1}{50} \\ &= \frac{49}{50} \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_1 = 2u_0 + 5 = 2 \times 1 + 5 = 7$.
   $u_2 = 2u_1 + 5 = 14 + 5 = 19$.
   $u_3 = 2u_2 + 5 = 43$.
   $\boxed{\text{D'où } u_1 = 7,\ u_2 = 19 \text{ et } u_3 = 43.}$
2. Soit (v_n) la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 5.$$

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 5 \\ &= 2u_n + 5 + 5 \\ &= 2 \times u_n + 2 \times 5 \\ &= 2(u_n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 2.}$

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$.
   Or, $v_0 = u_0 + 5 = 1 + 5 = 6$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 6 \times 2^n}$.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
   Comme $v_n = u_n + 5$, il est clair que $u_n = v_n - 5$ pour tout entier n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 6 \times 2^n - 5.}$
4. Exprimer en fonction de n :

(a) $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
D'après la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} S &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= 6 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 6 \times (2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

$\boxed{S = 6 \times (2^{n+1}-1).}$

(b) $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

$$\begin{aligned} S' &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= (v_0 - 5) + (v_1 - 5) + \cdots + (v_n - 5) \\ &= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \underbrace{(-5-5-\cdots-5)}_{n+1 \text{ fois}} \\ &= S - 5(n+1) \\ &= 6 \times (2^{n+1}-1) - 5n - 5 \\ &= 6 \times 2^{n+1} - 5n - 11 \end{aligned}$$

$\boxed{S' = 6 \times 2^{n+1} - 5n - 11.}$

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$.

1. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -2n+5$, qui n'est pas constant (dépend de n).
On va fournir un contre-exemple à la définition d'une suite arithmétique en considérant les premiers termes :
$u_0 = 4$.
$u_1 = 4 - 0 + 5 = 9$.
$u_2 = 9 - 2 + 5 = 12$.
Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
Il est clair qu'on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre.
$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$

2. (v_n) est définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. (v_n) arithmétique ?

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) \\ &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\ &= u_{n+1} - 2(n+1) + 5 - 2u_{n+1} + u_n \\ &= -u_{n+1} - 2n + 3 + u_n \\ &= -u_n + 2n - 5 - 2n + 3 + u_n \\ &= -2 \end{aligned}$$

Pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n - 2$.
$\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -2.}$
Autre méthode pour le calcul, $v_n = -2n + 5$.
Donc $v_{n+1} - v_n = (-2 \times (n+1) + 5) - (-2n + 5) = -2$.

3. Exprimer v_n en fonction de n.
$v_0 = u_1 - u_0 = 9 - 4 = 5$.
Pour tout n, $v_n = v_0 + nr$.
$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ v_n = 5 - 2n, \text{ comme on l'a vu déjà.}}$

4. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{5 + 5 - 2n}{2} \times (n+1) \\ &= (5-n)(n+1) \end{aligned}$$

5. Démontrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.
En revenant à la définition de (v_n),

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \\ &= u_{n+1} - u_0 \end{aligned}$$

6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
Pour tout n, $u_{n+1} = S_n + u_0$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= S_{n-1} + u_0. \\ u_n &= [5 - (n-1)] \times (n - 1 + 1) + 4 \\ &= (6-n)n + 4 \\ &= -n^2 + 6n + 4 \end{aligned}$$

Or, cette formule, en remplaçant n par 0, donne $u_0 = 4$.
La formule est donc correcte pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2 + 6n + 4.}$

Exercice 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (on admet que $u_n \neq 0$ pour tout n).

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, donner sa raison et son premier terme.
   Soit n un entier naturel quelconque.
   $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n}$
   Pour montrer que (v_n) est une suite arithmétique, on montre que $v_{n+1} - v_n = \mathit{constante}$:
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{2u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= 2 \end{aligned}$$
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2$: (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.
   Par ailleurs, $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{1} = 1$.
   $\boxed{(v_n) \text{ est la suite arithmétique de raison } r = 2 \text{ et de premier terme } v_0 = 1.}$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
   D'après le cours, pour tout entier n, $v_n = v_0 + nr$;
   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + 2n.}$
3. En déduire u_n en fonction de n.
   Comme $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, il est clair que $u_n = \dfrac{1}{v_n}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{1 + 2n}.}$

Exercice 5
Une entreprise emprunte 2 000 000 € à une banque, à rembourser par mensualités sur 10 ans.

Partie A

1. Chaque mensualité coûte 300 euros de plus que la précédente,
   donc, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = u_n + 300$.
   La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 300.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 300 donc :
   pour tout entier n non nul, $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.
   De plus $u_1 = 8000$, et $r = 300$, donc pour tout entier n non nul,
   $u_n = 8000 + 300n - 300 = 300n + 7700$.
3. La somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise est : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{120}$.
   Or (u_n) est une suite arithmétique donc $S = 120\,\dfrac{u_1 + u_{120}}{2}$.
   De plus $u_{120} = 300 \times 120 + 7700 = 43700$,
   donc $S = 120\,\dfrac{8000 + 43700}{2} = 120 \times 25850 = 3102000$.
   La somme totale remboursée par l'entreprise en 10 ans est donc de 3102000 euros.

Partie B

1. Chaque mois la mensualité augmente de 1 % ,
   donc, pour tout entier n non nul, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{100} v_n = 1,01 v_n$.
   La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1,01$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $1,01$,
   donc pour tout entier n non nul, $v_n = v_1 \times 1,01^{n-1}$.
3. Le versement total en 10 ans est de : $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_{120}$.
   Or (v_n) est une suite géométrique donc :
   $V = v_1\,\dfrac{1 - 1,01^{120}}{1 - 1,01} = v_1\,\dfrac{1 - 1,01^{120}}{-0,01} = 100v_1(1,01^{120} - 1)$
4. Le versement total est de 3 000 000 si et seulement si $V = 3000000$.
   $$\begin{aligned} V = 3000000 &\iff 100v_1(1,01^{120} - 1) = 3000000 \\ &\iff v_1 = \frac{30000}{1,01^{120} - 1} \\ &\iff v_1 \approx 13041,28 \end{aligned}$$
   Pour un rembousement total de 3 000 000, le premier versement doit être de 13041,28 euros.

Exercice 6

1. Soit la fonction Python suivante :
```
def A(n):
    L=[1-4*i for i in range(n+1)]
    return(L)
```
   (a) Écrire A(6) en extension.
   (b) La fonction A renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes d'une suite. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette suite.
2. Écrire une fonction Python B d'argument n qui renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique définie par $u_0 = 5$ et de raison 3. Donner la liste en extension lorsqu'on entre $n = 7$.